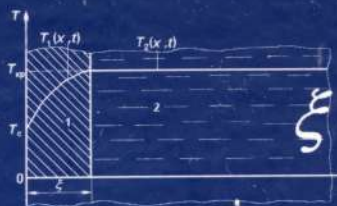
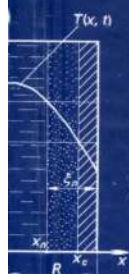


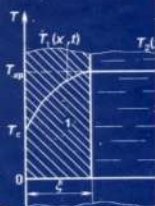
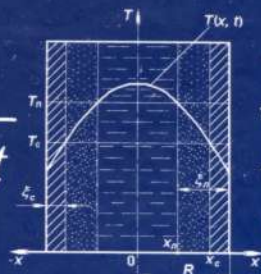
Б.С. Чуркин

ТЕОРИЯ ЛИТЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Учебник



$$\xi = m\sqrt{t}$$



Екатеринбург
2006

ББК К61-1я73-1
УДК 621.74.01(075.8)
Ч-93

**Чуркин Б.С. Теория литейных процессов: Учеб. /Под ред. Э.Б. Гофмана. – Екатеринбург, 2006. – 454 с.
ISBN 5-8050-0174-8**

В учебнике изложены основы теории литейных процессов. Основное внимание материала уделено освещению научных основ процессов, происходящих при формировании отливок, и современным методам их количественного описания. Изложены основные подходы к решению задач, связанных с расчетом и анализом кинетики затвердевания отливок, процессами их питания, формирования деформаций и напряжений.

Учебник предназначен для студентов высших учебных заведений, обучающихся по литейным специальностям и специализациям.

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. Е.Л. Фурман (Уральский государственный технический университет–УПИ); д-р техн. наук, профессор Б.А. Кулаков (Южно-Уральский государственный технический университет).

ISBN 5-8050-0174-8

© Российский государственный
профессионально-педагогический
университет, 2006
© Чуркин Б.С., 2006

Оглавление

Предисловие	7
Введение	8
РАЗДЕЛ 1. СТРОЕНИЕ И СВОЙСТВА ЖИДКИХ МЕТАЛЛОВ И СПЛАВОВ	12
Глава 1. Современные представления о природе и строении твердых и жидких металлов и сплавов	12
1.1. Природа и строение твердых металлов и сплавов	14
1.2. Современные представления о механизме плавления	26
1.3. Модели жидкого состояния	28
1.4. Математические и экспериментальные методы исследования жидкого состояния	30
1.5. Особенности строения жидких сплавов	35
1.6. Взаимосвязь жидкого и твердого состояния сплава	39
Глава 2. Реологические свойства жидких и твердых сплавов	41
2.1. Простейшие реологические модели тел	41
2.2. Вязкость перегретых жидких сплавов	48
2.3. Реологические свойства сплава в интервале кристаллизации	54
Глава 3. Поверхностные явления в металлах и сплавах	63
3.1. Поверхностное натяжение жидких металлов	63
3.2. Поверхностное натяжение сплавов	64
3.3. Капиллярные явления. Смачиваемость	66
3.4. Силы адгезии и когезии	70
3.5. Роль поверхностных явлений в пригарообразовании на отливках	71
Контрольные вопросы и задания	74
РАЗДЕЛ 2. ТЕОРИЯ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ ОТЛИВОК. ПРОЦЕССЫ ТЕПЛООБМЕНА В ЛИТЕЙНОЙ ФОРМЕ	76
Глава 1. Основы теории теплопередачи	76
1.1. Основные понятия теории теплопередачи	76
1.2. Механизмы теплопередачи	82
1.3. Основы теории теплопроводности	91
1.3.1. Дифференциальное уравнение теплопроводности	91
1.3.2. Стационарный режим теплопроводности	101
1.3.3. Теплопроводность при нестационарном режиме	117
Контрольные вопросы и задания	141
Глава 2. Основы теории затвердевания отливок	146
2.1. Анализ состояния теории затвердевания	146
2.2. Аналитические методы расчета кинетики затвердевания	151

2.2.1. Физические представления о затвердевании сплавов	151
2.2.2. Математическая модель затвердевания отливок классических конфигураций	165
2.2.3. Аналитические методы решения краевых задач затвердевания	172
2.2.4. Приближенные методы расчета кинетики затвердевания отливок	183
2.2.5. Сравнительный анализ расчетных методов	188
2.3. Численные методы расчета кинетики затвердевания отливок	194
2.3.1. Метод конечных разностей	194
2.3.2. Метод потоков	207
2.3.3. Метод конечных элементов	211
Контрольные вопросы и задания	212
РАЗДЕЛ 3. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ФОРМИРОВАНИЯ КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ ОТЛИВОК	216
Глава 1. Основные закономерности самопроизвольной кристаллизации металлов и сплавов	216
Глава 2. Теория гетерогенного зародышеобразования	228
Глава 3. Механизм и кинетика роста кристаллических зародышей	232
Глава 4. Кинетика кристаллизации. Формула Колмогорова	239
Глава 5. Перераспределение примесей на фронте кристаллизации сплавов. Внутрикристаллическая ликвация	244
Глава 6. Концентрационное переохлаждение. Условие устойчивости плоского фронта кристаллизации сплавов	250
Глава 7. Ячеистая и дендритная кристаллизация	254
Глава 8. Особенности кристаллизации эвтектики	260
Глава 9. Кристаллическая структура отливок	265
9.1. Структурные зоны в отливке	265
9.2. Химическая неоднородность сплава в отливках	269
Глава 10. Методы управления кристаллическим строением отливки	273
10.1. Влияние теплового режима плавки, заливки и затвердевания сплава	273
10.2. Модифицирование сплавов	275
10.3. Физико-химические методы управления формированием кристаллической структуры отливок	280
Контрольные вопросы и задания	283
РАЗДЕЛ 4. УСАДОЧНЫЕ ЯВЛЕНИЯ ПРИ ФОРМИРОВАНИИ ОТЛИВКИ	285
Глава 1. Физическая природа усадки. Объемная и линейная усадка	285

Глава 2. Влияние технологических факторов на усадку сплавов в отливках	289
Глава 3. Объемные усадочные дефекты в отливках	292
3.1. Формирование усадочных раковин	292
3.2. Влияние технологических факторов на конфигурацию и положение усадочной раковины в отливке	298
3.3. Усадочная пористость в отливках	310
3.4. Методы борьбы с объемными усадочными дефектами. Расчет и конструирование прибылей	320
Глава 4. Литейные напряжения и деформации в отливках	335
4.1. Горячие трещины в отливках	335
4.1.1. Теория горячеломкости сплавов	338
4.1.2. Реологическая модель сплава в интервале кристаллизации	342
4.1.3. Механизм образования горячих трещин	348
4.1.4. Мероприятия по борьбе с образованием горячих трещин в отливках	352
4.2. Литейные напряжения в отливках	356
4.2.1. Усадочные напряжения в отливках	358
4.2.2. Термические напряжения в отливках	359
4.2.3. Фазовые напряжения в отливках	368
4.2.4. Пороки отливок, вызываемые литейными напряжениями	368
4.2.5. Мероприятия по снятию литейных напряжений	371
4.2.6. Классификация внутренних напряжений	372
Контрольные вопросы и задания	372
РАЗДЕЛ 5. ОСНОВЫ ЛИТЕЙНОЙ ГИДРАВЛИКИ	380
Глава 1. Особенности гидродинамики металлических расплавов	380
Глава 2. Теплофизические и гидродинамические процессы при течении металлических расплавов в литейной форме	388
2.1. Механизм остановки потока сплава в литейной форме	389
2.2. Расчет максимальной продолжительности течения сплавов в каналах литейной формы	396
2.3. Гидродинамические особенности заполнения форм сплавом	404
2.4. Характер изменения температуры в потоке сплава ...	408
Глава 3. Жидкотекучесть металлов и сплавов. Заполняемость форм сплавом	414
Глава 4. Примеры расчетов тепловых и гидродинамических параметров заливки простейших форм	419
Контрольные вопросы и задания	425

РАЗДЕЛ 6. ГАЗЫ И НЕМЕТАЛЛИЧЕСКИЕ ВКЛЮЧЕНИЯ В ОТЛИВКАХ	427
Глава 1. Закономерности взаимодействия расплавов с газами ..	427
Глава 2. Выделение газов при охлаждении и затвердевании сплава. Механизм формирования эндогенных раковин и пористости в отливках	433
Глава 3. Физико-химические основы предотвращения газовых дефектов в отливках	438
3.1. Адсорбционные методы рафинирования	438
3.1.1. Рафинирование продувкой газами	438
3.1.2. Рафинирование флюсами	440
3.1.3. Рафинирование синтетическими шлаками	440
3.2. Неадсорбционные методы рафинирования	441
3.2.1. Рафинирование вакуумированием	441
3.2.2. Рафинирование ультразвуком	443
3.3. Раскисление сплавов	444
Глава 4. Экзогенные и эндогенные неметаллические включения	445
Контрольные вопросы и задания	447
Заключение	448
Библиографический список	449
Предметный указатель	450
Список основных условных обозначений	452

*Посвящаю светлой памяти отца
Сергея Григорьевича Чуркина –
потомственного уральского
литейщика*

Предисловие

Литейное производство – единственная технология получения заготовок для деталей, при которой материал находится в жидком исходном состоянии. Это обуславливает главные преимущества литейной технологии – максимальное соответствие литой заготовке (детали). Коэффициент использования металла в литой заготовке самый высокий. Поэтому литейное производство – основная технология в заготовительном производстве современного машиностроения.

Однако получение изделий из жидкого расплава сопряжено со сложнейшими процессами, которые обуславливают появление в отливках различного рода дефектов.

Для получения качественных заготовок литейщик должен уметь на научной основе управлять формированием отливок. Оптимальное управление технологией получения отливок основывается на глубоком знании разнообразных процессов, исследование сущности которых составляет предмет прикладной научной дисциплины – теории литейных процессов.

В основу данного учебника положен материал лекций, которые автор в течение 30 лет читал студентам Уральского политехнического института и Российского государственного профессионально-педагогического университета. В содержание учебника включены результаты исследований крупнейших отечественных и зарубежных ученых Г.Ф. Баландина, Н.Г. Гиршовича, Б.Б. Гуляева, Г.М. Дубицкого, Ю.А. Нехендзи, Г. Флемингса, Н.И. Хворинова, Р. Эллиота и др., а также собственные исследования автора.

Введение

Получение изделий методами литья металлических сплавов является одним из древнейших способов металлообработки. В исторической литературе до настоящего времени продолжают дискуссии по вопросу о том, какими методами изготовления металлических предметов человек овладел раньше — литьем или ковкой, т.е. кто раньше появился — литейщик или кузнец. Следует, однако, отметить, что в чистом виде металлы в земной коре даже в те далекие времена встречались чрезвычайно редко. Их производство связано с переработкой руд, в результате которой металлы получали в жидком, расплавленном виде. Их заливали в специальные формы, и после затвердевания получали отливку или слиток. Отливка представляет собой готовое изделие, а слиток необходимо еще подвергнуть пластической обработке, например ковке. Таким образом, литейные процессы, как правило, предшествуют любому методу металлообработки.

В настоящее время практически все изделия из металлических сплавов получают из литого, т.е. закристаллизованного из жидкого состояния, сплава. Получение металлов и сплавов в жидком, расплавленном состоянии называется *пирометаллургией*. Она является основным металлургическим процессом. В связи с этим литейные процессы, происходящие при получении из жидкого металла отливки или слитка, во многом определяют качественные характеристики металлопродукции и эксплуатационные свойства любых машин от автомобиля до космической ракеты.

Кроме пирометаллургии интенсивно развиваются методы *гидрометаллургии*, в которых металлы получают из растворов или расплавов солей. При этом металлы осаждаются в твердом виде. Эти методы, например электролитическое получение катодной меди, основаны на химических и электрохимических процессах. Однако объем металла, получаемого гидрометаллургическими методами, не идет ни в какое сравнение с объемом пирометаллургического производства. Эта ситуация сохранится и в обозримом будущем.

В настоящее время интенсивно развивается *порошковая металлургия*, т.е. получение изделий путем прессования и спекания металлических порошков. Однако основные методы получения порошков основаны на кристаллизации распыленного в различные среды (например, в воду) расплавленного металла, т.е. здесь также имеют место литейные процессы.

Основным процессом при формировании отливки или слитка является затвердевание сплава, т.е. переход сплава из жидкого состояния в твердое. Обычно различают два аспекта затвердевания.

Первый аспект — тепловой. Как известно, плавление вещества требует затраты энергии, которая применительно к единице массы вещества называется удельной теплотой плавления. При затвердевании эквивалент-

ное количество тепла должно быть отведено от сплава. Если жидкий металл при температуре кристаллизации поместить в идеальную теплоизоляционную оболочку, то он будет находиться в жидком виде бесконечно долго. Чем с большей скоростью тепло будет отводиться от расплава в стенки формы, тем быстрее затвердеет сплав. Поэтому литейщик должен уметь управлять тепловыми процессами при охлаждении и затвердевании отливки и нагреве формы.

Второй аспект связан с формированием кристаллической структуры отливки, т.е. с кристаллизацией. Затвердевание, как правило, сопровождается фазовым переходом из жидкого состояния в твердое кристаллическое. Этот переход связан с зарождением и ростом центров кристаллизации, которые называют зародышами. Эксплуатационные и физические свойства отливок зависят от размеров и формы кристаллитов. Зарождение и рост кристаллов – сложные физико-химические процессы, которые, по словам академика Л.В. Шубникова, можно сравнить лишь с зарождением и развитием биологических организмов.

Кристаллическая структура отливки во многом определяется строением и свойствами жидкого сплава. Поэтому большое значение имеет управление жидким состоянием сплава путем изменения его химического состава, введения различных примесей, применения физических и механических воздействий (давление, ультразвук, электромагнитные воздействия, облучение рентгеновскими лучами, гамма-излучением и т. п.).

Как известно, тела при нагревании расширяются, а при охлаждении сжимаются. При затвердевании практически все металлы уменьшают свой объем. Исключение составляют висмут и галлий. Уменьшение объема при охлаждении и затвердевании сплава называется усадкой. Усадочные процессы приводят к формированию в отливках различных дефектов в виде усадочных пустот (раковин или пор). Из-за термического или механического торможения усадки в отливках возникают временные или остаточные напряжения, снижающие их прочность, а иногда приводящие к короблению отливок или к возникновению в них трещин. Вопросы формирования напряжений выходят далеко за пределы чисто литейных проблем и имеют большое общенаучное значение.

В условиях Земли как планетного образования литейные процессы сопряжены не только с действием гравитационных сил, но и с влиянием газовой атмосферы. Вопросы растворения газов и их выделения из металлических расплавов являются важным разделом литейной технологии. В процессе приготовления сплава, его разлива и затвердевания происходят сложные физико-химические явления, сопровождающиеся растворением газов в жидком и твердом металле, образованием различных продуктов химического взаимодействия газов с компонентами сплава (оксиды, карбиды, нитриды и т. д.). В процессе заливки формы сплавом и теплового

взаимодействия отливки и формы может происходить захват газов потоками сплава, появление окисных плен, образование газов в объеме песчаных форм, приводящее к повышению газового давления в полости формы и в ее стенках. Если не обеспечить соблюдение соответствующих условий, налагаемых на газодинамический режим форм, то в отливках возникают газовые дефекты в виде раковин или пор. Увеличение газового давления при заливке форм с повышенной газотворностью и низкой газопроницаемостью может привести даже к выбросу металла из формы.

Важнейшим процессом в литейной технологии является заполнение формы сплавом. Поэтому инженер-литейщик должен быть специалистом в области гидромеханики, прежде всего гидромеханики расплавов. Необходимо уметь управлять скоростью движения металла в форме и ее каналах, структурой потока, обеспечивать улавливание различных неметаллических включений, попавших в расплав, а также плавное, безударное движение расплава на разных участках полости формы.

Теория литейных процессов включает в себя широкую гамму вопросов, связанных с формообразованием, формированием механических и технологических свойств литейных форм, взаимодействием формы с расплавом, определяющим качество поверхностей получаемых отливок. Решение этих вопросов основано на широком применении современных достижений физической и неорганической химии. Можно говорить о развитии специальной области химии – химии литейных формовочных материалов.

Теория литейных процессов – относительно молодая прикладная техническая наука, насчитывающая всего около 50 лет. Термин «теория литейных процессов» появился в литературе в 60-х гг. прошлого века. Современная теория литейных процессов сложилась благодаря трудам отечественных и зарубежных ученых Д.К. Чернова, Н.В. Калакуцкого, Ю.А. Нехендзи, Н.Г. Гиршовича, Б.Б. Гуляева, А.И. Вейника, Г.Ф. Баландина, Я.И. Френкеля, Ю.А. Степанова, Н.И. Хворинова, Р.У. Раддла, М.К. Флемингса, Й. Пржибыла, Р. Эллиота. Значительный вклад внесен уральской школой литейщиков, в том числе А.А. Горшковым, Г.М. Дубишким, А.А. Рыжковым. В своем развитии теория литейных процессов прошла ряд этапов.

Первый этап (до середины 50-х гг. XX в.) был связан с накоплением и систематизацией экспериментального материала. Теория носила в основном качественный характер. Она объясняла механизм тех или иных явлений, предсказывала на качественном уровне результаты различных технологических операций. Уже на этом этапе наука много сделала для превращения литейного производства из искусства в инженерную дисциплину. На смену традиционным в прошлом методам проб и ошибок пришли технологические методы решения литейных проблем, основанные на прочном научном фундаменте. Развитие литейного производства и усложнение его задач выдвинули перед теорией литейных процессов требования

разработки количественных рекомендаций и методов расчета параметров технологических процессов получения отливок. В связи с этим с начала 50-х гг. прошлого века начинается интенсивное проникновение математических методов в теорию литейных процессов.

Однако литейные процессы связаны с широким комплексом одновременно протекающих фундаментальных процессов различной природы: физико-химических и теплофизических, гидродинамических и газодинамических, электрофизических и механических. При получении отливки вещество находится во всех четырех известных состояниях: твердом, жидком, газообразном и в виде плазмы (плазменная плавка, плазменное напыление форм, стержней и отливок и т.п.). В связи с этим разработка комплексной математической модели формирования отливки представляет собой чрезвычайно сложную задачу, которая по многообразию возникающих трудностей превосходит проблематику моделирования процессов в электротехнике, электрофизике, радиотехнике и других технических науках, где наиболее широко применяются математические методы.

В настоящее время применение математических методов в теории и технологии литейных процессов вышло на новый уровень благодаря широкому использованию современных методов прикладной математики и вычислительной техники. Мы подошли вплотную к созданию систем автоматизированного проектирования технологии (САПР), основными принципами разработки и эксплуатации которых необходимо овладеть в вузе.

Вместе с тем сегодня осуществляется непрерывный процесс углубления и коренного пересмотра наших представлений о природе жидкого состояния сплавов и методах управления их свойствами, молекулярной теории кристаллизации, теории кристаллизации сплавов в больших объемах. Идет поиск новых методов математического моделирования процессов, геометрического моделирования отливок сложных конфигураций, разрабатываются принципиально новые процессы формообразования и методы воздействия на кристаллизующийся расплав новейших физических эффектов.

По широте проблематики и глубине изучения вопросов теория литейных процессов не только требует фундаментальной общенаучной и инженерной подготовки, но и открывает широкий творческий простор, особенно для молодежи. Заканчивая характеристику предмета и методологии курса «Теоретические основы литейных процессов», следует отметить его большое значение для формирования инженеров-литейщиков.

В настоящее время теория литейных процессов является базой как для прогнозирования качества изготавливаемых отливок, так и для определения оптимальных значений комплекса технологических параметров. Курс предполагает достаточную подготовку студентов в области математики, физики, химии, физической химии, теории металлургических процессов, металловедения, гидравлики и теплофизики.

РАЗДЕЛ 1. СТРОЕНИЕ И СВОЙСТВА ЖИДКИХ МЕТАЛЛОВ И СПЛАВОВ

Глава 1. СОВРЕМЕННЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О ПРИРОДЕ И СТРОЕНИИ ТВЕРДЫХ И ЖИДКИХ МЕТАЛЛОВ И СПЛАВОВ

В зависимости от давления и температуры любое вещество может находиться в твердом, жидком, газообразном состоянии, а также в состоянии плазмы. Диаграмма состояния однокомпонентного вещества приведена на рис. 1.1. Линии AD и AD' на диаграмме разделяют области кристаллического состояния и жидкости. Линия AD относится к веществам, удельный объем которых при плавлении увеличивается (большинство веществ), а линия AD' – к веществам, удельный объем которых при плавлении уменьшается (вода, галлий, висмут, сурьма, германий и кремний). Из диаграммы видно, что с увеличением давления температура плавления этих веществ уменьшается. Температура плавления большинства веществ с ростом давления увеличивается.

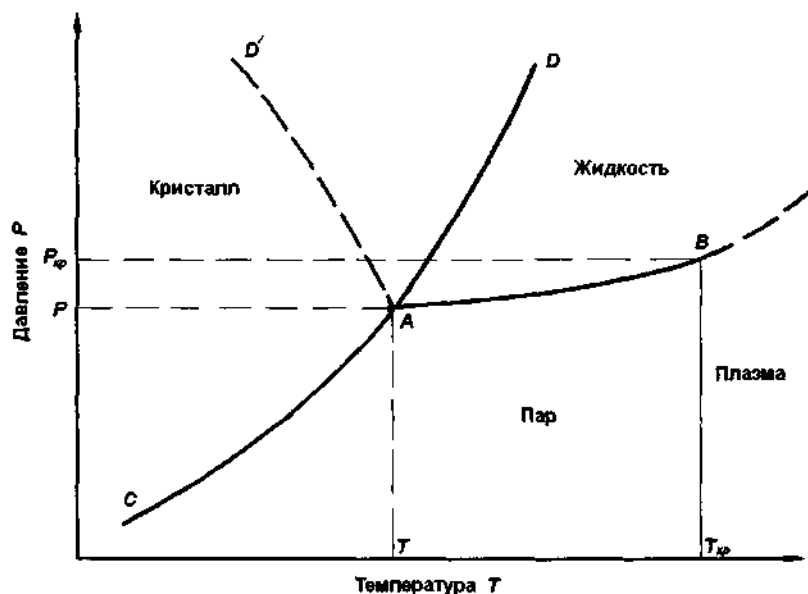


Рис. 1.1. Диаграмма состояния однокомпонентной системы

Линии AD и AD' представляют собой линии равновесия кристалл – жидкость, т.е. геометрическое место точек, отвечающих значениям параметров (давление P и температура T), при которых кристалл и жидкость находятся в динамическом равновесии. В этом случае граница раздела твердой и жидкой фаз является плоской. При искривлении поверхности раздела характер зависимости температуры плавления от давления остается таким же, но линии смещаются влево или вправо в зависимости от того, выпуклое или вогнутое твердое тело.

Температура плавления выпуклых кристаллов (сферических частиц) ниже, чем плоских, а температура плавления вогнутых кристаллов (включения металла в различных неметаллических частицах) выше, чем плоских. Связь температуры плавления кристаллов T_n с их радиусом кривизны и температурой плавления плоских кристаллов $T_{равн}$, которую будем называть *равновесной*, выражается следующей формулой:

$$T_n = T_{равн} \left(1 - \frac{2\sigma}{R \cdot \rho \cdot L} \right), \quad (1.1)$$

где σ – коэффициент межфазного натяжения кристалла на границе с жидкостью;

R – радиус кривизны кристалла;

ρ – плотность металла;

L – удельная теплота плавления.

В формуле (1.1) радиус кривизны выпуклого кристалла положительный, а вогнутого – отрицательный. Из формулы видно, что для плоского кристалла ($R=\infty$) $T_n=T_{равн}$, с уменьшением радиуса кривизны температура плавления выпуклого кристалла уменьшается, а вогнутого – увеличивается.

Формула (1.1) справедлива для кристаллов, ограниченных сферической поверхностью. При произвольной конфигурации поверхности формула имеет вид

$$T_n = T_{равн} \left(1 - \frac{\sigma}{\rho L} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right), \quad (1.2)$$

где R_1 и R_2 – главные (наибольший и наименьший) радиусы кривизны поверхности.

Следует отметить, что изменения температуры плавления становятся существенными лишь при радиусах поверхностей кристаллов, меньших 0,001 мм.

Линия AB является линией равновесия жидкости и пара. Для каждого значения температуры в пределах от T до $T_{кр}$ по линии AB мы можем найти давление насыщенного пара жидкости. Точка B соответствует критическому состоянию (точка абсолютного кипения), при котором исчезает различие между жидким и газообразным состояниями вещества. При температуре выше $T_{кр}$ газ невозможно перевести в жидкость ни при каких давлениях. При атмосферном давлении ширина области жидкого состояния (между линиями AD и AB) для многих металлов достаточно велика и значительно превышает применяемые в практике литья перегревы металла выше его температуры плавления. Например, температура плавления алюминия $T_n=660$ °С, а температура кипения $T_{кип}=2327$ °С; для меди $T_n=1083$ °С, $T_{кип}=2596$ °С; для железа $T_n=1535$ °С, $T_{кип}=2880$ °С. Для этих металлов испарение в условиях литейных процессов не играет большой роли. В то же время для цинка $T_n=419,5$ °С, $T_{кип}=906$ °С; для магния $T_n=651$ °С, $T_{кип}=1107$ °С. Температура кипения этих металлов близка к температуре плавления. Они отличаются, как говорят, большой летучестью. Поэтому при их наличии в сплавах необходимо учитывать процессы парообразования. Линия AC представляет собой линию равновесия твердого металла и его пара.

При температурах, значительно превышающих $T_{кр}$, происходит ионизация газов и они переходят в состояние плазмы, представляющей собой совокупность ионов и электронов. Как видно из диаграммы (см. рис. 1.1), жидкое состояние вещества занимает промежуточное положение между твердым и газообразным состояниями. Поэтому жидкости сохраняют отдельные свойства как твердых, так и газообразных тел. Твердые тела по характеру расположения и движения атомов и молекул подразделяются на кристаллические и аморфные.

1.1. Природа и строение твердых металлов и сплавов

Основным свойством кристаллического состояния вещества является правильное, упорядоченное расположение атомов в пространстве. Кристаллическое состояние вещества характеризуется четкой пространственной структурой, называемой *кристаллической решеткой*.

О. Браве установил, что любой кристалл можно построить на основе 14 элементарных ячеек. Наиболее распространенными ячейками металлических кристаллов являются кубическая объемно центрированная (ОЦК), кубическая гранецентрированная (ГЦК), компактная гексагональ-

ная (рис. 1.2). Предполагается, что в идеальном кристалле атомы расположены строго в узлах решетки и неподвижны. Кроме того, считается, что решетка является бесконечно протяженной, т.е. каждая элементарная ячейка окружена достаточным количеством других ячеек (далека от поверхностей реальных тел).

Важнейшей характеристикой кристаллической решетки является *координационное число*, т.е. число ближайших соседей данного атома. С помощью элементарных геометрических расчетов можно определить, что в объемно центрированной кубической решетке координационное число 8, т.е. около каждого атома в решетке находится 8 атомов, расположенных на минимальном расстоянии $r_1 = a\sqrt{3}/2$, где a – параметр решетки. На расстоянии r_2 , равном a , находится 6 атомов, на расстоянии r_3 , равном $a\sqrt{2}$, – 8 атомов и на расстоянии $r_4 = a\sqrt{11}/2$ – 24 атома. Расположение атомов в решетке дискретно, так как они находятся лишь на определенных расстояниях от данного атома, называемых *радиусами координационных сфер*.

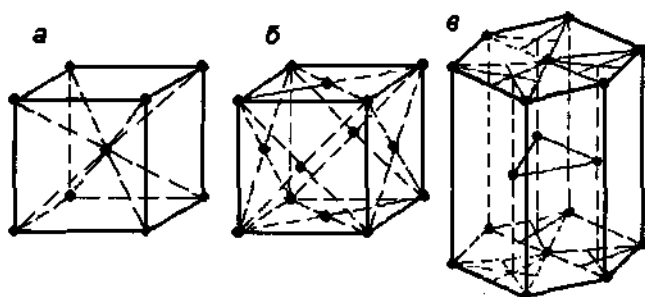


Рис. 1.2. Распространенные типы кристаллических решеток металлов и сплавов:

а – объемно центрированная; б – гранецентрированная;
в – компактная гексагональная

Таким образом, в объемно центрированной кубической решетке на первой координационной сфере с $r_1 = a\sqrt{3}/2$ находится 8 атомов, на второй с $r_2 = a$ – 6 атомов, на третьей с $r_3 = a\sqrt{2}$ – 8 атомов, на четвертой с $r_4 = a\sqrt{11}/2$ – 24 и т.д. Между сферами атомов нет.

Для гранецентрированной кубической решетки легко установить, что на первой координационной сфере с $r_1 = a\sqrt{2}/2$ находится 12 атомов, на второй с $r_2 = a$ – 6 атомов, на третьей с $r_3 = a\sqrt{6}/2$ – 24 атома и т. д.

Приняв в идеальном приближении, что кристалл плотно упакован и соседние атомы касаются друг друга, можно радиус первой сферы принять равным $2R$, где R – атомный радиус. С учетом этого получаем, что для объемно центрированного куба $r_1=2R$, $r_2=4R\frac{\sqrt{3}}{3}$, $r_3=4R\frac{\sqrt{6}}{3}$, $r_4=2R\frac{\sqrt{33}}{3}$, а для гранецентрированного куба $r_1=2R$, $r_2=2R\sqrt{2}$, $r_3=2R\sqrt{3}$ и $r_4=4R$.

С учетом полученных значений радиусов координационных сфер и количества находящихся на них атомов можно построить графики пространственного расположения атомов в объемно центрированной и гранецентрированной кубических решетках (рис. 1.3).

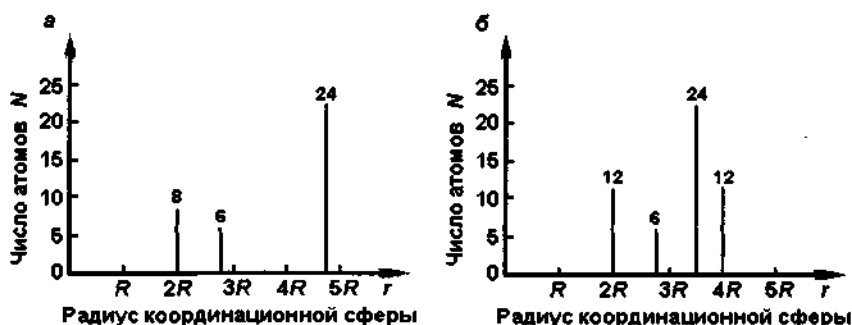


Рис. 1.3. Распределение числа атомов по первым координационным сферам: а – для объемно центрированного куба; б – для гранецентрированного куба

Такова в общих чертах характеристика идеального кристалла. Реальный кристалл имеет целый ряд существенных особенностей. Прежде всего, атомы не находятся неподвижно в узлах решетки, а их атомные диаметры не совпадают с радиусом первой координационной сферы.

Известно, что атомы совершают колебания относительно узлов решетки, которые являются положениями равновесия. Интенсивность колебаний, или теплового движения атомов, увеличивается с ростом температуры. При низких температурах атомы совершают колебания относительно фиксированных узлов, т.е. так называемое трансляционное движение отсутствует, и атомы не перемещаются поступательно по решетке. Однако с повышением температуры вероятность появления трансляционного поступательного движения атомов увеличивается. Для того чтобы охарактеризовать механику реального кристалла, рассмотрим вопрос о межчастичном взаимодействии в кристаллах.

Атомы металлов, как и других элементов, представляют собой положительные ядра с вращающимися относительно них электронами. Элек-

троны находятся на разных энергетических уровнях, т.е. обладают разными энергиями. При сближении любых двух атомов, начиная с некоторого расстояния, их внешние электронные оболочки перекрываются, подобно тому как при образовании молекулы водорода электроны каждого атома попадают в сферу влияния ядер обоих атомов и обобществляются, т.е. процесс сближения атомов металла приводит к обобществлению части их электронов.

В пределах кристаллической решетки эти электроны уже не принадлежат только своим атомам. В результате образуется система, в которой в узлах решетки находятся положительно заряженные ионные остовы, а в объеме решетки расположены свободные коллективизированные электроны. Именно наличием этих электронов объясняется высокая электропроводность металлов.

Рассмотрим процесс сближения атомов. Если расстояние между ними достаточно велико, то атомы можно представить как два диполя, которые притягиваются друг к другу. При этом заряды ближайших атомов обоих диполей вследствие электростатической индукции имеют разную полярность. Это явление, как известно из физики, называется *поляризацией*. Силы притяжения, возникающие вследствие поляризации, обратно пропорциональны расстоянию между атомами в седьмой степени ($F_{пр} \sim 1/R^7$). Эти силы называются силами Ван-дер-Ваальса. Такая зависимость сил притяжения говорит о том, что они при увеличении расстояния между атомами быстро убывают (на расстоянии, в несколько раз превышающем размеры атомов, эти силы практически исчезают).

Если атомы сблизить на расстояние, сравнимое с размерами электронных орбит, например, несколько меньшее диаметра этих орбит, то электронные оболочки начинают деформироваться и между атомами возникают силы отталкивания, называемые *обменными силами*. Силы отталкивания близкодействующие, они убывают с увеличением расстояния быстрее, чем силы притяжения. Известно эмпирическое приближение, что $F_{от} \sim 1/R^{13}$. Простейшей и широко применяемой формулой для описания потенциала межчастичных взаимодействий является потенциал Ленарда-Джонса:

$$U = U_{\min} \left[\left(\frac{R_0}{R} \right)^{12} - 2 \left(\frac{R_0}{R} \right)^6 \right], \quad (1.3)$$

где R_0 – расстояние, соответствующее минимуму потенциала;

$U_{\min}$ – модуль минимума потенциала.

Формула Ленарда-Джонса моделирует изменение потенциала взаимодействия двух частиц. Рассмотрим две частицы, причем левую закрепим

неподвижно. Изменение потенциала при изменении расстояния на dR равно работе сил взаимодействия, т.е.

$$F = -\frac{dU}{dr} = U_{\min} \left(12 \frac{R_0^{12}}{R^{13}} - 12 \frac{R_0^6}{R^7} \right) = F_{om} - F_{np}, \quad (1.4)$$

где $F_{om} = 12U_{\min} \frac{R_0^{12}}{R^{13}}$ и $F_{np} = 12U_{\min} \frac{R_0^6}{R^7}$.

Графически изменение результирующей силы взаимодействия и энергии связи частиц с изменением расстояния показано на рис. 1.4. Видно, что при $R=R_0$ $F=0$, т.е. $|F_{np}|=|F_{om}|$. Положению равновесия соответствует минимум энергии связи, т.е. потенциальная яма. Если бы не было теплового движения атомов, то атомы в кристаллической решетке располагались бы на расстоянии R_0 друг от друга, которое физически определяет параметр решетки.

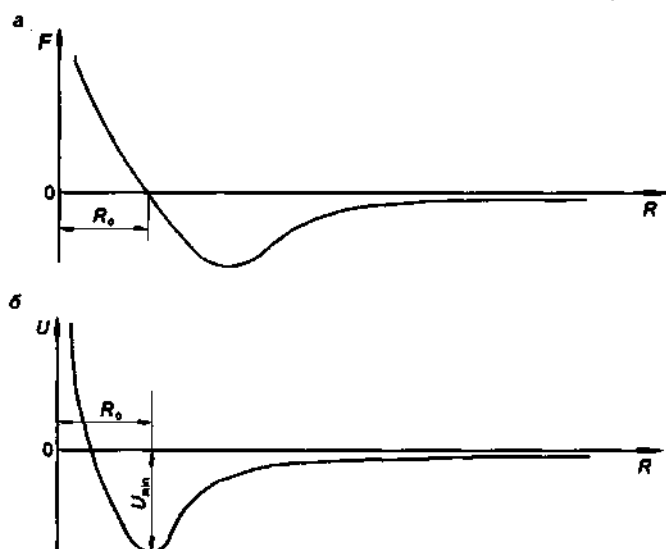


Рис. 1.4. Зависимость силы (а) и потенциала взаимодействия (б) двух атомов от расстояния между ними

Отмеченные выше закономерности имеют общий характер. В чем же специфика металлов? Обменные силы отталкивания зависят от степени заполнения внешней электронной оболочки. С ее увеличением силы отталкивания возрастают. Как известно, наибольшую заполненность внешней оболочки имеют инертные газы (гелий, аргон, криптон и т.д.). На внешних оболочках у них максимально возможное число электронов – 8. При сближении атомов оболочки практически не перекрываются и не происходит образование обобщенных электронов и ионов. Поэтому инертные газы – диэлектрики.

Рассмотрим случай, когда внешние электронные оболочки не заполнены электронами (число внешних электронов меньше 8). Здесь возможно большее сближение атомов и перекрытие электронных оболочек с образованием ионов и коллективизированных электронов. Свободные электроны оказывают влияние на силы притяжения. Электроны, находящиеся между двумя положительными ионами, притягивают их с силой, большей силы притяжения ионов, так как расстояние между каждым ионом и электронами меньше, чем расстояние между ионами. При этом всякое изменение параметра решетки вызывает изменение плотности электронов между ионами, что, в свою очередь, приводит к возникновению сил, стремящихся вернуть решетку в исходное состояние. Такой тип связи называется *металлическим*. Силы отталкивания теперь связаны с деформацией внутренней заполненной электронной оболочки иона, имеющей радиус $R_2 < R_1$, где R_1 – радиус внешней оболочки, электроны которой коллективизированы. Равновесие ионов достигается на расстоянии R_0 , находящемся в интервале $2R_1 - 2R_2$.

Кристаллы чистых металлов очень устойчивы по отношению к сильным смещениям частиц. Если металл растянуть, то увеличится вероятность нахождения электронов между ионами (электронная плотность) и появятся силы, стремящиеся вернуть решетку в исходное состояние. Если металл сжать, то электроны вытесняются из межионного пространства, электронная плотность уменьшается, и силы отталкивания начинают превышать силы притяжения. При снятии внешнего воздействия решетка вернется в исходное состояние. Поэтому чистые металлы способны без разрушения выдерживать большие пластические деформации. Хрупкость отдельных металлов и сплавов объясняется наличием в решетке различных кристаллических дефектов (вакансии, дислокации и т.п.).

Электроны оказывают существенное влияние на свойства металлов. Однако более детальное рассмотрение электронной теории металлов выходит за рамки данного курса. Студентам, интересующимся электронной теорией металлов, можно рекомендовать книгу Н.Б. Брандта, С.М. Чудинова «Электронная структура металлов» [4].

До сих пор мы рассматривали кристалл в условиях, когда кинетическая энергия частиц равна нулю, т.е. частицы неподвижно находятся в положениях равновесия (параметр решетки равен R_0). Однако это невозможно даже при абсолютном нуле. Как и в любом теле, частицы в твердом металле обладают кинетической энергией E , которая связана с температурой. В первом приближении можно принять, что $E=kT$, т.е. с ростом температуры E увеличивается. Если под действием теплового движения положение равновесия нарушится, и расстояние между частицами увеличится, то силы притяжения превзойдут силы отталкивания и появится сила, возвращающая частицы в положение равновесия. При уменьшении расстояния между частицами силы отталкивания превзойдут силы притяжения, и возвращающая сила снова будет направлена к положению равновесия. Таким образом, возникает ситуация, характерная для колебательного движения. Однако колебания частиц в данном случае будут ангармоническими.

Для возникновения гармонических колебаний необходимо, чтобы возвращающая сила была пропорциональна отклонению от положения равновесия. В этом случае кривая энергии связи симметрична (рис. 1.5). Пусть при температуре T_1 энергия теплового движения E_1 , а при температуре $T_2 > T_1$ энергия теплового движения $E_2 > E_1$. Видно, что частица совершает симметричные колебания, причем с ростом температуры амплитуда колебаний увеличивается. Положение равновесия при этом не изменяется.

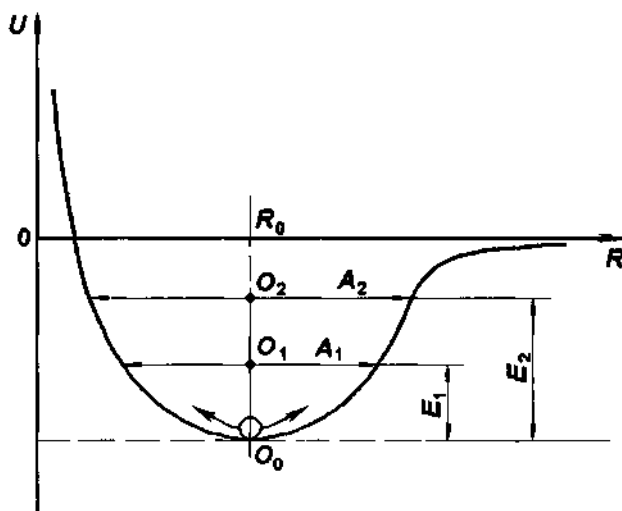


Рис. 1.5. Зависимость потенциала взаимодействия частиц от расстояния между ними при гармоническом характере колебаний

В кристаллах же возвращающая сила, как видно из формулы (1.4), не пропорциональна отклонению от положения равновесия (R находится в знаменателе). С ростом расстояния силы отталкивания убывают быстрее, чем силы притяжения. Поэтому кривая энергии связи несимметрична (рис. 1.6). С увеличением температуры, а, следовательно, и энергии теплового движения амплитуда колебаний возрастает, но положение равновесия смещается в сторону увеличения расстояния между частицами. Это приводит к увеличению параметра решетки, т.е. к тепловому расширению. Таким образом, термическое расширение тел объясняется не ростом амплитуды тепловых колебаний частиц, а асгармоническим характером этих колебаний.

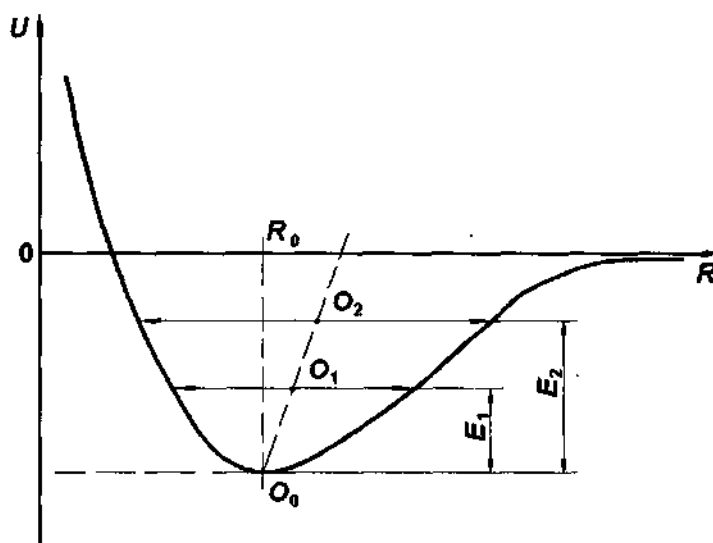


Рис. 1.6. Изменение параметра кристаллической решетки при нагревании

Мы рассмотрели характер движения частиц в упрощенном случае, представив линейный кристалл, состоящий из двух частиц. В действительности в пространственной решетке колебания носят сложный характер. Каждая частица испытывает действие сил связи со стороны всех окружающих ее частиц кристалла. Так как силы связи быстро убывают с увеличением расстояния, то учитывают действие только ближайших «соседей». Если изменить характер движения какой-либо одной частицы, то это изменение будет передано соседним частицам, а от них – к их «соседям» и т.д. Например, если тело с одной стороны нагреть, то колебания частиц в

этой части кристалла усилятся. Это усиление теплового движения через силы связи передастся соседним частицам и достигнет противоположного конца тела, т.е. повышение температуры в какой-либо части тела приведет к ее повышению в остальных. Такова природа теплопроводности.

Следует отметить, что при этом не происходит направленного перемещения частиц. Они колеблются около своих положений равновесия. В кристалле разные частицы колеблются с разными частотами и в разных фазах. Период колебаний частиц имеет порядок 10^{-13} с. Таким образом, если мы «сфотографируем» частицы в кристалле со временем экспозиции, меньшим 10^{-13} с, то никакого порядка в расположении частиц не увидим, так как все они будут находиться на разных расстояниях от положений равновесия. Реально же время экспозиции всегда больше 10^{-13} с. Поэтому фактически мы увидим частицы в положениях равновесия, т.е. упорядоченную структуру кристалла.

В кристалле энергия теплового движения меньше энергии связи, т.е. $E < |U_{\min}|$. С увеличением температуры растет энергия теплового движения, и при некоторой температуре она приблизится к энергии связи. При этом произойдет плавление кристалла, т.е. его переход в жидкое состояние. Для иллюстрации поведения частиц в кристалле при нагревании рассмотрим изменение энергии связи двух частиц в зависимости от положения между ними средней частицы.

Если расстояние между частицами достаточно мало (температура значительно меньше температуры плавления), то энергия средней частицы распределена в соответствии с рис. 1.7, а. При этом средняя частица имеет минимум энергии, находясь посередине между крайними частицами, что соответствует правильному расположению частиц в кристалле.

Если же крайние частицы раздвинуть на очень большое расстояние, что соответствует испарению металла, то средним положениям частицы будет соответствовать отсутствие сил взаимодействия. Кривая энергии средней частицы в этом положении показана на рис. 1.7, б. Видно, что на значительных расстояниях между частицами средняя частица не будет испытывать взаимодействия с крайними, как в идеальном газе.

Рассмотрим случай, когда температура близка к температуре плавления. Крайние частицы находятся на таком расстоянии друг от друга, что энергия связи средней частицы будет изменяться в зависимости от расстояния, как показано на рис. 1.7, в. Положение в центре промежутка между крайними частицами будет неустойчивым, и частица перейдет в потенциальную яму около левой или правой частицы. При этом кристалл разрушится. Нарушится дальний порядок в размещении частиц. Частицы первой координационной сферы (ближайшие к данной частице) останутся связанными с ней, а более удаленные потеряют связь с этой частицей. Говорят, что сохранился ближний порядок в размещении атомов. Средняя частица со-

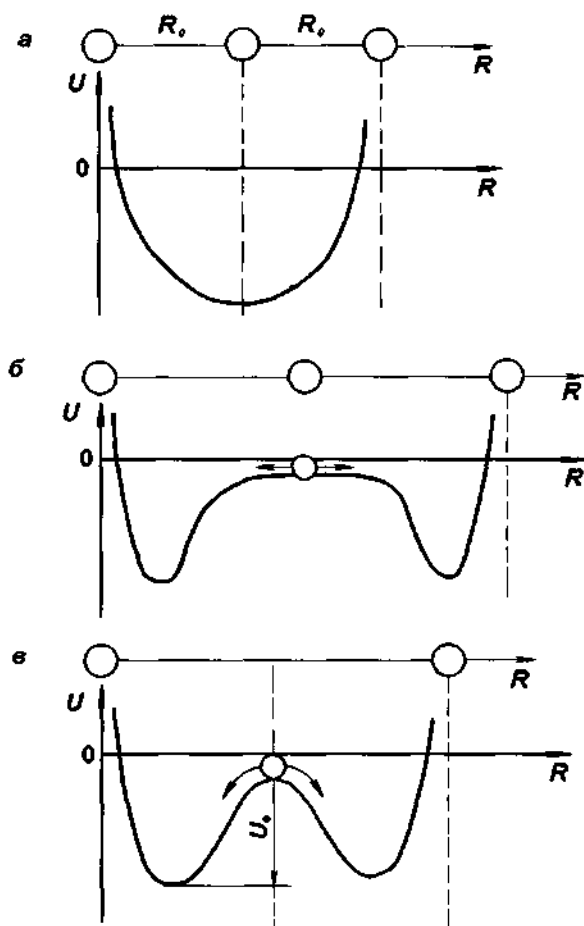


Рис. 1.7. Изменение потенциалов средней частицы при малых (а), очень больших (б) и некоторых средних (в) расстояниях между крайними атомами

совершает колебания только около одной из указанных на рис. 1.7, в частиц. Следует, однако, отметить, что данное положение будет динамическим. Глубина потенциальной ямы не столь велика, чтобы средний атом, накопив вследствие флуктуации энергию, не перешел в потенциальную яму около соседней, т.е. правой, частицы. При этом происходит смена положения равновесия колебаний. Описанная картина соответствует жидкому состоянию.

Таким образом, частицы в жидкостях совершают колебания такого же типа, что и в кристаллах, но положения равновесия, относительно которых совершаются колебания, не остаются неподвижными. Совершив некоторое число колебаний около данного положения равновесия, частица скачком переходит в новое положение и продолжает там колебаться, пока снова не перескочит в новое положение. По Я.И. Френкелю, длительность пребывания частицы около данного положения равновесия – время оседлой жизни – определяется по формуле $\tau = \tau_0 \cdot e^{U_0/kT}$, где τ_0 – период колебания около положения равновесия; U_0 – высота потенциального барьера, отделяющего два положения равновесия (глубина потенциальной ямы); k – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура. Обычно τ имеет порядок 10^{-10} с. Период же колебаний имеет порядок 10^{-12} – 10^{-13} с. Значит, частица, прежде чем переменить место, совершит 100–1000 колебаний.

Молекулы жидкости в основном ведут оседлый образ жизни, что сближает их с молекулами твердых тел. С увеличением температуры время оседлой жизни уменьшается, т.е. снижается доля колебательного движения и увеличивается доля поступательного трансляционного движения. Таким образом, в жидкостях сохраняется на достаточно высоком уровне взаимодействие между частицами, сосуществующее с тепловым движением. Такое состояние в отличие от газов, где энергия взаимодействия значительно меньше энергии теплового движения, называется *конденсированным состоянием*. Отличие жидкости от твердых кристаллических тел состоит в наличии кроме колебательного трансляционного движения, доля которого увеличивается с повышением температуры. Однако для более полного понимания процесса плавления необходимо отметить, что и в твердых телах частицы могут совершать трансляционное движение, усиливающееся по мере приближения к температуре плавления.

Как известно из молекулярно-кинетической теории, среди частиц газа или жидкости, находящихся при данной температуре, можно найти частицы, обладающие разной кинетической энергией, в том числе и значительно отличающейся от соответствующего данной температуре среднего значения $E=kT$. Однако кривая распределения числа частиц в зависимости от их энергии имеет острый максимум при $E=kT$, т.е. относительное количество частиц, обладающих энергией, существенно отличающейся от $E=kT$, невелико. Например, количество частиц, имеющих энергию в 2 раза большую этой величины, составляет всего 5 %.

Таким образом, в жидкости при данной температуре имеется определенное количество частиц, обладающих кинетической энергией, превышающей энергию связи частиц в кристалле. Вспомним, что именно наличием этих быстрых частиц в физике объясняют процесс испарения. Такая частица в кристалле преодолевает силы связи с «соседями» и покинет дан-

ную ячейку, переместившись в соседнюю. Там она займет место в узле, если оно свободно, или разместится в объеме узла (в междоузлии). Место этой частицы в прежней ячейке окажется вакантным. Говорят, что там образовалась *вакансия* (или дырка). Переместившийся атом, если он находится в междоузлии, называется *дислоцированным*. Схема образования дислоцированных атомов и вакансий показана на рис. 1.8.

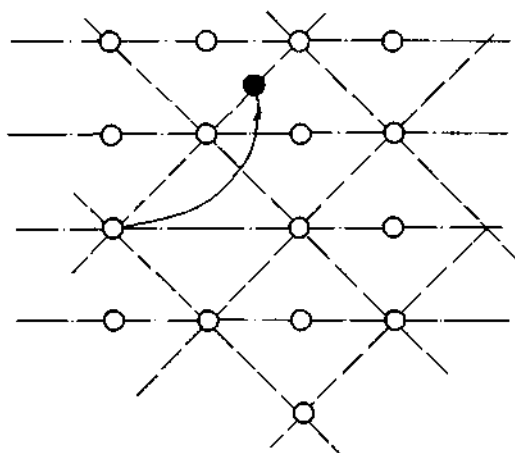


Рис. 1.8. Схема образования вакансий и дислоцированных атомов

Наличие вакансий в твердом теле создает условия для трансляционного поступательного движения частиц. Процесс перемещения частиц и вакансий в чистом металле называется *самодиффузией*. Для оценки числа вакансий Я.И. Френкелем предложена формула $N_v = N \cdot e^{-U/kT}$, где N_v — число вакансий; N — общее число частиц; U — энергия образования вакансии, близкая к энергии испарения. Я.И. Френкелем выполнен следующий расчет для кадмия. При комнатной температуре (300 К) вакансий мало, $N_v/N = 10^{-18}$. Уже при температуре 600 К $N_v/N = 10^{-9}$. Особенно быстро растет количество вакансий вблизи температуры плавления (до 1,5 %).

Вакансии и дислоцированные атомы относятся к точечным дефектам кристаллической решетки, приводящим к ее искажению и созданию около дефектов напряженного состояния. Характер искажения решетки в плоском изображении показан на рис. 1.9.

Установлено, что геометрия ионного остова и электрический потенциал решетки при этом искажаются на значительном расстоянии, равном 10–20 межатомным расстояниям от дефекта. Эту деформированную зону

называют *сферой деформации* (СД). Сфера деформации около вакансии несет отрицательный заряд, так как положительный ион замещен вакансией (дыркой). Однако электрическое взаимодействие вакансий на расстояниях, превышающих радиус сферы деформации $R_{сд}$, весьма мало. Так как вакансии перемещаются по кристаллу, то перемещаются и сферы деформации. При сближении СД на расстояния $l \leq R_{сд}$ между ними возникают силы отталкивания.

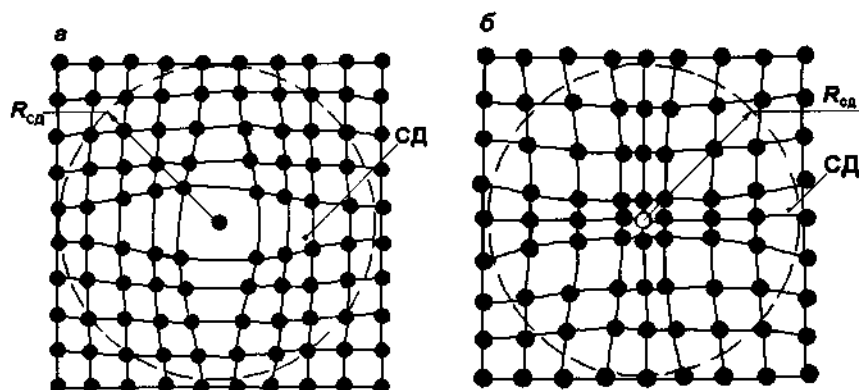


Рис. 1.9. Схема искажения кристаллической решетки около дислоцированного атома (а) и вакансии (б)

1.2. Современные представления о механизме плавления

В объяснении процесса плавления главную роль из рассмотренных дефектов решетки играют вакансии. На их роль впервые обратил внимание Я.И. Френкель. Создан целый ряд теорий, объясняющих плавление. На наш взгляд, очень убедительной выглядит вакансионно-кластерная теория И.В. Гаврилина и Г.С. Ершова.

При низких температурах число вакансий в кристалле невелико и расстояния между сферами деформации больше их диаметров. Поэтому СД не взаимодействуют друг с другом и подобно газовым частицам свободно, хаотически перемещаются по кристаллу (рис. 1.10, а). При некоторой температуре $T = T_k$ концентрация вакансий возрастает до величины, при которой расстояния между СД сравниваются с их диаметрами. При этом СД смыкаются, образуя плотную упаковку (рис. 1.10, б). Дальнейшее повышение температуры должно сопровождаться увеличением числа вакансий. Однако

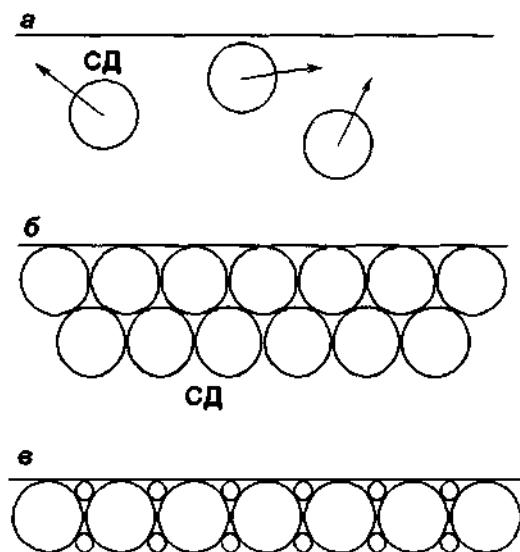


Рис. 1.10. Схема плавления по И.В. Гаврилину и Г.С. Ершову:

а – $T \ll T_{пл}$; б – $T \approx T_{пл}$; в – $T = T_{пл}$

при $T = T_k$ вследствие взаимного отталкивания СД места для размещения новых вакансий отсутствуют. Возникает противоречие между тенденцией к сохранению дальнего порядка и тенденцией к росту числа вакансий.

Разрешение этого противоречия осуществляется путем потери дальнего порядка. Новые вакансии могут образовываться только лишь в пустотах плотной упаковки СД (рис. 1.10, в). Скопления и перемещения вакансий по границам сфер деформации приводят к тому, что решетка дробится на отдельные блоки, равные по размерам диаметру СД. Эти блоки называются *кластерами*. Таким образом, в пределах кластера сохраняется порядок в расположении атомов (ближний порядок), но за пределами кластера порядок нарушается (нет дальнего порядка).

Для дробления решетки на кластеры необходимо затратить энергию на разрыв связей кластеров друг с другом. Эта энергия и представляет собой теплоту плавления. Температура T_k , при которой СД смыкаются, равна температуре плавления.

При плавлении происходит изменение объема, вызванное двумя следующими эффектами. Во-первых, вследствие отталкивания друг от друга образовавшихся кластеров происходит увеличение объема. С другой стороны,

так как при плавлении силы связи между кластерами резко уменьшаются, увеличивается их подвижность. До перехода в жидкое состояние зоны СД связаны между собой и сохраняют упаковку, характерную для кристалла. После плавления связи между кластерами разрушаются, они получают возможность смещаться относительно друг друга. Известно, что минимуму энергии соответствует более плотная упаковка частиц (минимальная поверхность). Поэтому в жидкости кластеры принимают более плотную упаковку, чем та, которая была в кристалле. Благодаря этому эффекту объем жидкости должен быть меньше объема кристалла.

Результирующее изменение объема при плавлении равно алгебраической сумме этих эффектов. Для большинства металлов превалирует первый эффект, и объем при плавлении увеличивается примерно на 3 %. Для таких аномальных веществ, как висмут, галлий, сурьма, кремний, превалирует эффект переупаковки кластеров, и объем при плавлении уменьшается. Кластеры в жидкости находятся в сложном тепловом движении. При этом происходят процессы их воссоединения (восстановления связей) и последующего дробления, но уже по другим поверхностям разрыва. Теплота плавления значительно меньше теплоты испарения, а изменения объема невелики. Поэтому силы связи между частицами в жидкости остаются практически на том же уровне, что и в кристалле. Однако возрастает энергия теплового движения. Это позволяет считать, что при температурах, близких к температуре плавления, жидкости ближе к кристаллам, чем к газам.

В заключение необходимо отметить, что теория плавления в настоящее время еще не создана. Приведенная теория может рассматриваться как некоторое приближение.

1.3. Модели жидкого состояния

До сих пор не созданы такие эффективные модели жидкого состояния, какими являются модели идеального газа для газов и идеального кристалла для кристаллических тел. Все существующие модели жидкого состояния можно разделить на две большие группы: квазигазовые модели и квазикристаллические модели.

Общим для квазигазовых моделей является игнорирование межчастичного притяжения. Взаимодействие частиц сводится только к их упругим столкновениям. Простейшей является модель «твердых шаров», при которой частицы жидкости уподобляются твердым взаимно непроницающим шарам. Потенциал их взаимодействия равен

$$U=0, \text{ если } r>2R_{ш},$$

$$U=\infty, \text{ если } r\leq 2R_{ш}.$$

Согласно формулам, частицы не взаимодействуют друг с другом, пока не столкнутся. При столкновении возникают упругие силы отталкивания. Радиус шаров принимают равным радиусу первой координационной сферы кристалла или определяют на основании рентгенографического исследования жидкости (расстояние до первого максимума интенсивности рассеивания излучения). Так как под действием сил отталкивания при отсутствии притяжения частицы разлетятся, то вводится некоторый коэффициент их упаковки $\eta = \pi d^3 \frac{N_0}{6V_0}$, где V_0 – мольный объем жидкости; N_0 – число

Авогадро. Коэффициент упаковки выбирают для конкретной жидкости.

На основании выбранных значений η и d , а также принятого для твердых сфер указанного выше потенциала можно математически определить радиальную функцию распределения частиц, т.е. число частиц, окружающих данную частицу, как функцию расстояния от нее. Расчетные значения функции распределения неплохо согласуются с экспериментальными данными для некоторых металлов с плотными структурами кристаллов, т.е. для гексагональной решетки и гранецентрированного куба. Вместе с тем для большинства металлов расчетные и экспериментальные данные расходятся.

С целью улучшения этой модели в 60-е гг. прошлого века Дж. Бернал вместо твердых шаров предложил другие конфигурации частиц. Он провел эксперименты с пластилиновыми шарами, подвергнув конструкцию из этих шаров всестороннему сжатию. После сжатия частицы принимали форму многогранников с гранями от треугольных до 12-угольных. Однако значительная часть (больше 30 %) частиц принимали вид многогранника с пятиугольными гранями. На основании этого Дж. Бернал сделал вывод, что в жидкости вокруг атома может образовываться кольцо из пяти «соседей». В кристаллах такого координационного числа нет. В остальном модель Бернала остается моделью твердых сфер. Отличие состоит в том, что взаимодействуют не отдельные шары, а некоторые их конфигурации, имеющие вид рассмотренных выше фигур, в вершинах которых расположены частицы. Теория Бернала дает неплохие результаты для ряда сжиженных газов (аргон, гелий и т.д.).

Общим недостатком квазигазовых моделей является игнорирование фактических данных о наличии в жидкости достаточно сильных сил связи. Эти модели не объясняют, почему жидкость сохраняет свой объем и ее частицы не разлетаются, занимая весь предоставленный объем, как в газах. Чем вызывается плотность упаковки?

Общим для всех *квазикристаллических моделей* является попытка при описании жидкого состояния учесть специфику сил межчастичного

взаимодействия, установить связь структуры жидкости с предшествующим плавлению кристаллическим строением вещества.

Согласно сиботаксической модели Стюарта, жидкость состоит из множества хаотически ориентированных микрокристаллических областей – сиботаксисов. Данную модель можно считать частным случаем квазиполикристаллических моделей. В современном виде идеи этих моделей сформулированы В.И. Архаровым и И.А. Новохатским. По созданной ими модели жидкость состоит из двух структурных составляющих: кластеров и разупорядоченной зоны. В разупорядоченной зоне структура и тепловое движение соответствуют сильно сжатым реальным газам. В кластерах структура и тепловое движение соответствуют кристаллам. Между кластерами и разупорядоченной зоной нет четко выраженной границы раздела. Эта точка зрения в том или ином виде развивается в других квазикристаллических моделях. Отличия состоят в толковании кластера, характера его движения и межкластерного взаимодействия.

Выше мы описали подход к понятию кластера как коллектива частиц кристалла, находящегося внутри сферы деформации около вакансии. Внутри кластера исходная структура кристалла не повторяется, сохраняется только ближний порядок, т.е. конфигурации первых координационных сфер решетки кристалла.

Все квазикристаллические модели с трудом поддаются количественному математическому описанию.

1.4. Математические и экспериментальные методы исследования жидкого состояния

Выделим в среде частицу и проведем сферический слой толщиной dR на расстоянии R от этой частицы. Пусть в этом слое находится dN частиц. Число частиц в единице объема вещества на расстоянии R можно выразить формулой $\rho(R) = \frac{dN}{4\pi R^2 dR}$. Эта величина в общем случае зависит от расстояния R . Она называется *радиальной функцией распределения частиц* и полностью характеризует структуру вещества. Для идеальных газов характерно хаотическое распределение молекул. Поэтому в среднем в каждой точке газа содержится одинаковое число молекул. В этом случае $\rho(R)$ не зависит от координаты R и совпадает с объемной плотностью частиц. В идеальных кристаллах частицы расположены только на координационных сферах. Поэтому $\rho(R)$ между сферами равна нулю. Графически функция радиального распределения частиц в гранецентрированной решетке показана на рис. 1.11 (R – атомный радиус).

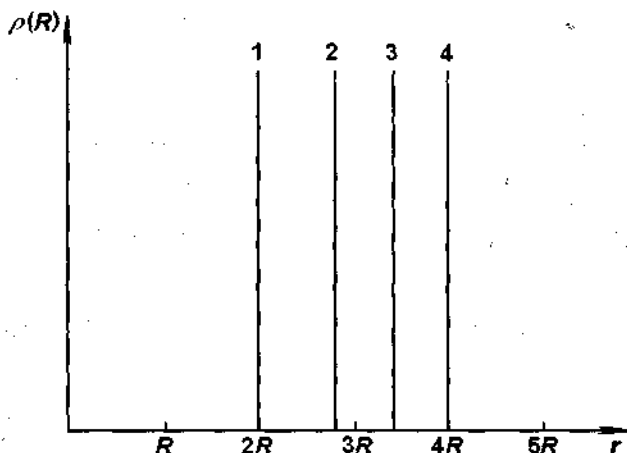


Рис. 1.11. Радиальная функция распределения для гранецентрированного кубического кристалла

Жидкость – динамическая система, и распределение частиц в ней носит случайный характер. Поэтому для описания $\rho(R)$ следует использовать аппарат теории вероятностей.

Вероятность того, что в сферическом слое около молекулы 1 можно обнаружить частицу 2, равна $dP(R) = W(R) \cdot 4\pi R^2 dR/V$. Смысл этого выражения сводится к следующему. Представим, что на бумаге начерчен круг радиуса R_1 , внутри которого находится круг меньшего радиуса R_2 . Мы с закрытыми глазами ставим внутри большого круга точку. Как оценить вероятность того, что точка попадет внутрь малого круга? Если $R_2 = R_1$, то очевидно, что вероятность равна единице. Будем уменьшать радиус малого круга. Ясно, что вероятность будет уменьшаться. Если $R_2 = 0$, то вероятность равна нулю. Поэтому вероятность (отношение числа положительных исходов к общему числу испытаний) можно вычислить как отношение площади малого круга к площади большого круга. Это будет справедливо, если положение частицы 2 не зависит от положения частицы 1.

Если между частицами есть силы взаимодействия, то очевидно, что вероятность нахождения частицы 2 на расстоянии R зависит от того, находится или нет частица 1 в начале координат. Этот факт учитывается множителем $W(R)$, который называется *корреляционной функцией распределения*. Если частицы не взаимодействуют, ясно, что $W(R) = 1$. В случае взаимодействующих частиц $W(R) \neq 1$. Так как вероятность нахождения частицы в бесконечной области около данной частицы равна единице, то для кор-

реляционной функции можно написать следующее нормировочное соотношение: $1/V \int_0^{\infty} W(R) 4\pi R^2 dR = 1$. Выразим число частиц в сферическом

слое толщиной dR через радиальную функцию распределения: $dN = \rho(R) \cdot 4\pi R^2 \cdot dR$. Проинтегрировав это выражение по всему объему среды, получим соотношение $\int_0^{\infty} \rho(R) 4\pi R^2 dR = N - 1 \approx N$. Сравнивая его

с нормировочным соотношением, находим, что $W(R) = \frac{V}{N} \cdot \rho(R) = \frac{\rho(R)}{\rho_0}$,

где $\rho_0 = \frac{N}{V}$ – среднее число частиц в единице объема. Значит, функция

$W(R)$ представляет собой относительную вероятность нахождения частиц на заданном расстоянии R от фиксированной молекулы. Из последней формулы находим $\rho(R) = \rho_0 \cdot W(R)$, т.е. для определения радиальной функции распределения нужно знать корреляционную функцию.

Выясним, какой вид имеет функция $W(R)$ для газов, кристаллов и жидкостей. Для газов, как было сказано выше, $W(R)=1$, если $R > 2r$, где r – радиус частицы; $W(R)=0$, если $R \leq 2r$, так как $\rho(R)=\rho_0$ на всех расстояниях, превышающих диаметр частицы. Для кристаллов характер изменения корреляционной функции в зависимости от расстояния совпадает с приведенным выше графиком изменения радиальной функции распределения $\rho(R)$.

Амплитуды колебаний частиц в жидкостях гораздо больше, чем в кристалле. При этом молекулы жидкости, участвуя в тепловом движении, беспрерывно обмениваются ближайшими «соседями». Если проследить за поведением какой-либо частицы, то можно убедиться, что за время наблюдения она окажется на разных расстояниях от данной частицы. Вследствие этого корреляционная функция W непрерывна. Она испытывает несколько затухающих колебаний относительно единицы. При расстоянии, превышающем некоторое значение, корреляционная функция практически равна единице, т.е. при этом исчезает порядок в размещении частиц. Это подтверждает факт, что в жидкостях нет дальнего порядка. Максимумы на кривой соответствуют более вероятным межмолекулярным расстояниям, минимумы – расстояниям, на которых частицы бывают очень редко. Последовательность максимумов соответствует последовательности равновесных межмолекулярных расстояний в жидкости и поэтому определяет характер ближней упорядоченности. Кривые $W(R)$ для газов (идеального и реального), жидкостей и соответствующих кристаллов приведены на рис. 1.12.

Сопоставляя функции $W(R)$ для жидкости и кристалла, видим, что в кристалле максимумы функции разделены промежутками, где $W(R)=0$, тогда как в жидкости кривая непрерывна.

Для экспериментального исследования строения жидкостей применяют облучение их рентгеновскими лучами, электронами или нейтронами. Рентгеновские лучи рассеиваются электронами атомов, электроны – ядрами атомов и нейтроны – магнитным полем атомов. Этими методами изу-

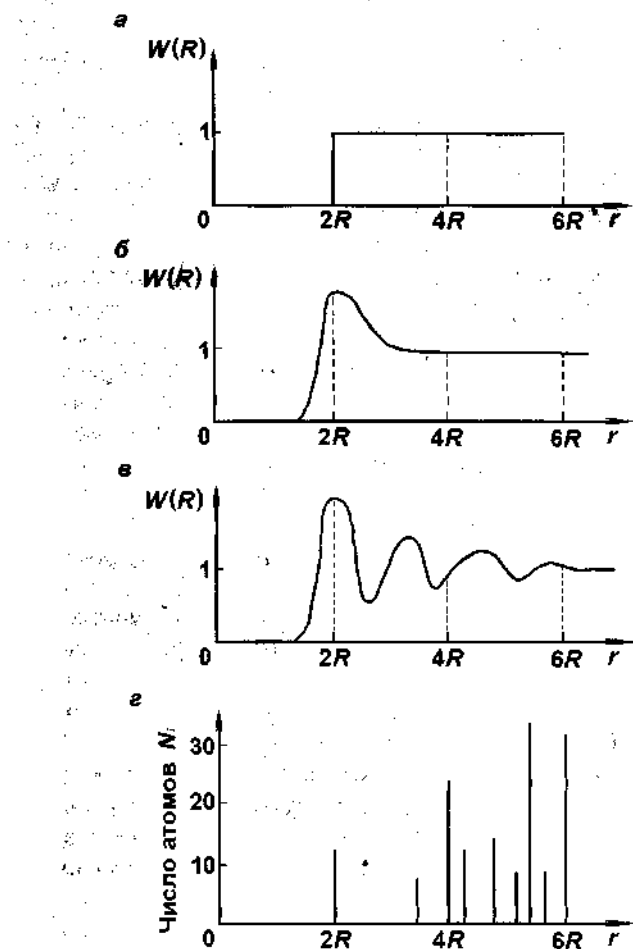


Рис. 1.12. Зависимость корреляционной функции от расстояния для идеального газа (а), реального газа (б), жидкостей (в) и кристалла ГЦК (г)

чают зависимость интенсивности рассеянного излучения от угла, под которым производится облучение. Теория методов, на которой мы не останавливаемся, позволяет связать интенсивность рассеивания с корреляционной функцией, т.е. по кривым интенсивности рассеивания излучения, направляемого под разными углами, можно экспериментально определить изменение корреляционной функции с увеличением расстояния.

Экспериментальные данные по изменению коррелятивных функций металлов показали, что для плотноупакованных металлов в твердом состоянии характерно сохранение ближнего порядка, имеющего место в кристалле, и уменьшение координационного числа. Первый максимум на кривой радиального распределения находится практически на том же расстоянии, что и радиус первой координационной сферы кристалла. Так, для меди в кристалле $r_1=2,55$ Å, первый максимум на корреляционной кривой находится на расстоянии 2,55 Å; для алюминия расстояния равны 2,86 и 2,94; для железа – 2,52 и 2,52; для цинка – 2,9 и 2,71 Å. Второй максимум на корреляционной кривой охватывает интервал расстояний, в который попадают радиусы второй, третьей и четвертой координационных сфер кристалла золота. Уменьшение координационного числа при плавлении плотноупакованных металлов (например, у алюминия с 12,0 до 10,8) связано с увеличением объема при плавлении и возрастанием числа вакансий.

Для рыхлых, некомпактно упакованных в твердом состоянии металлов (висмута, олова, сурьмы, галлия, кремния, германия и др.) также характерно малое отличие расстояния первого максимума на корреляционной кривой от радиуса первых координационных сфер кристаллов (у висмута эти расстояния равны соответственно 3,25 и 3,09 Å, у олова – 3,25 и 3,15, у сурьмы – 3,30 и 2,9 Å). Координационное число у этих металлов при плавлении увеличивается, что связано с уменьшением их объема (у висмута, например, координационное число увеличивается с 3,0 до 7,5 Å).

Таким образом, экспериментальные исследования подтверждают теоретические выводы о сохранении ближнего порядка кристаллов в жидких металлах и связи их строения со строением исходного кристалла.

Из сказанного выше следует, что для определения радиальной функции распределения необходимо знать корреляционную функцию. О ее экспериментальном определении мы уже говорили. Математическое ее вычисление составляет предмет статистической физики жидкого состояния, одним из основателей которой можно признать выдающегося советского ученого академика Н.Н. Боголюбова. Однако рассмотрение этого вопроса выходит за пределы нашего курса.

1.5. Особенности строения жидких сплавов

В отличие от чистых металлов, которые плавятся при фиксированной температуре, плавление и затвердевание сплавов осуществляется в некотором интервале температур. Температура, при которой начинается плавление или заканчивается затвердевание сплава, называется *температурой солидуса* T_c . Температура, при которой заканчивается плавление или начинается затвердевание, называется *температурой ликвидуса* T_d . Выше температуры ликвидуса существует жидкий сплав, ниже температуры солидуса – твердый сплав. В интервале ликвидус–солидус, который может составлять более 100 °С и называется *интервалом кристаллизации*, сплав находится в двухфазном состоянии, т.е. твердая и жидкая фазы сосуществуют. Температура ликвидуса определяется условиями равновесия жидкого сплава данного состава с выделяющейся из него твердой фазой. Аналогично температура солидуса определяется условиями равновесия твердой фазы, соответствующей составу сплава, с жидкой фазой.

В процессе плавления сплава изменяется не только его температура, но и химический состав находящихся в равновесии фаз. Как известно из курса «Металловедение», равновесие различных фаз в сплавах характеризуется диаграммами состояния, связывающими концентрации фаз с температурой и давлением. Известно много типов диаграмм состояния, зависящих от растворимости компонентов в жидком и твердом состояниях.

Вводимые в сплав компоненты могут растворяться в основном металле, образуя твердые растворы. При этом если область растворимости примыкает к чистому металлу, т.е. начинается с нулевой концентрации (на диаграмме «сигара» или ее участок начинается от чистого компонента), то при образовании раствора сохраняется тип кристаллической решетки основного металла (рис. 1.13, а). Если же область твердого раствора не примыкает к чистым металлам, то, как правило, образуется новая, более сложная решетка (рис. 1.13, б). Если в этом случае интервал растворимости невелик, то образуются так называемые *интерметаллические соединения*, представляющие собой также твердые растворы со специфической решеткой.

Примеров интерметаллидов очень много, и часто именно они определяют механические и технологические свойства сплавов. Так, металлографию алюминиевых сплавов очень часто называют металлографией интерметаллидов. В качестве примера можно привести бинарные интерметаллиды CuAl_2 , Mg_2Si , Mg_2Al_3 и т. д. Во многих случаях интерметаллиды могут быть многокомпонентными. Часто интерметаллиды образуют твердые растворы с основным металлом.

Различают два типа твердых растворов: растворы замещения и растворы внедрения. В *растворах замещения* ионы легирующего компонента

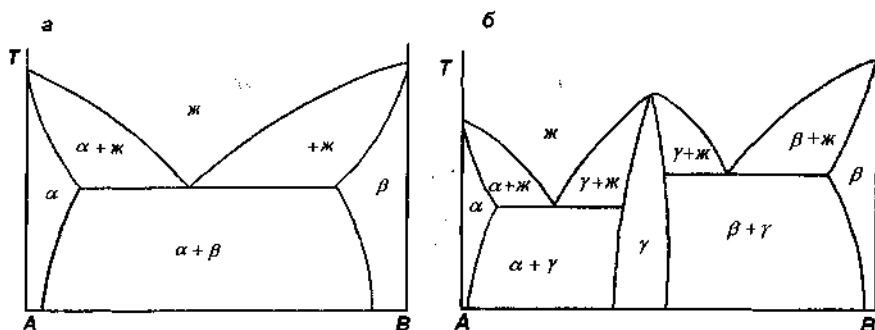


Рис. 1.13. Диаграммы состояния сплавов эвтектического типа без интерметаллидов (а) и с интерметаллидами (б)

размещаются в узлах кристаллической решетки, замещая ионы основного металла-растворителя. Это имеет место тогда, когда размеры атомов компонентов близки друг к другу. Примерами растворов замещения являются растворы никеля в меди, цинка в меди и многие другие. Если размеры атомов сильно различаются и атомы имеют разные строения электронных оболочек, например, у металлов и неметаллов, то образуются *растворы внедрения* (растворы бора, кислорода, азота). В них атомы растворенного вещества располагаются внутри кристаллической ячейки (в междоузлиях).

Введение легирующего компонента в раствор как при замещении, так и при внедрении искажает кристаллическую решетку, изменяет ее параметры и вызывает упругое напряженное состояние. Кроме того, легирующие компоненты оказывают влияние на скорость перемещения дислокаций.

Растворимость в твердом состоянии зависит от близости атомных диаметров компонентов, однотипности их кристаллических решеток и сходства строения внешних электронных оболочек. В соответствии с правилом Юма–Розери для образования непрерывной растворимости различие в размерах атомов не должно превышать 15%. При больших различиях деформация решетки столь велика, что образование раствора становится термодинамически невыгодным.

При плавлении сплавов и металлов сохраняется ближний порядок (распределение атомов в первых координационных сферах). Исследования показывают, что в жидком и твердом состояниях число атомов каждого вида в первых координационных сферах пропорционально их концентрации. Кривые интенсивности рассеяния излучений и радиальной функции распределения для сплавов напоминают аналогичные кривые для компонентов, отличаясь лишь координатами расположения максимумов. Максимумы располагаются между максимумами, характерными для чистых ком-

понентов, и по мере увеличения компонента смещаются от одного компонента к другому. Если в твердом растворе атомы расположены статистически, т.е. неупорядоченно, то и в жидком сплаве сохраняется неупорядоченность, и наоборот, упорядоченность в расположении атомов в твердом растворе при плавлении сохраняется.

Статистическое распределение атомов в растворе имеет место, когда энергии парного взаимодействия атомов A и B связаны соотношением $U_{AA}=U_{BB}=U_{AB}$. В этом случае конфигурации $A-A$, $A-B$, $B-B$ энергетически равноценны. В этих сплавах расстояние первого максимума на кривой радиального распределения и координационное число линейно изменяются с увеличением концентрации от значений этих величин для компонента A к их значениям для компонента B . При плавлении интерметаллидов, если между компонентами существует сильное взаимодействие, сохраняется ближний порядок в расположении атомов, характерный для твердых интерметаллидов.

Эвтектические сплавы образуются из компонентов, различающихся кристаллической решеткой и имеющих ограниченную растворимость в твердом состоянии. Этот тип сплавов чаще всего образуют металлы и неметаллы (например, алюминий–кремний) и металлы с сильно различающимися параметрами решетки (например, медь с серебром). В этом случае силы взаимодействия между одноименными атомами больше, чем между разноименными, т.е. $U_{AA} > U_{AB}$, $U_{BB} > U_{AB}$. Как показали исследования, при плавлении эвтектики расплав состоит из конфигураций, характерных для фаз α -твердого раствора и β -твердого раствора, составляющих эвтектику. При повышении температуры происходит постепенное перемешивание атомов и образование однородного раствора. Квазиэвтектическая структура в расплаве может сохраняться при перегревах на 200–300 °С.

Микронеоднородность жидких сплавов вызывается не только наличием кластеров, но и их различным составом, строением, устойчивостью. Самые устойчивые кластеры образуются наиболее сильно взаимодействующими между собой компонентами. Как показали исследования Б.А. Баума, в бинарных железоуглеродистых сплавах возможно наличие следующих кластеров. В расплаве существуют межатомные связи Fe–Fe и Fe–C, при этом наиболее сильные – в сплаве Fe–C. Расплав представляет собой неоднородную систему, в которой межатомные связи Fe–Fe в микрообластях, удаленных от атомов примеси, и в непосредственной близости от них отталкиваются, так как атом углерода вызывает сильные искажения электронной плотности близко расположенных атомов железной матрицы. На рис. 1.14 показана схема микронеоднородной структуры железа, легированного углеродом. Темный кружок обозначает атом углерода; светлый кружок – атом железа; сплошные линии – межатомные связи, но-

мер и длина которых обратно пропорциональны их прочности; заштрихованные области – кластеры типа объемно центрированного куба; окружностью K ограничен кластер, содержащий углерод.

В системе можно выделить четыре типа межатомных связей, которые в порядке убывания прочности обозначены цифрами 1–4: 1 – связь Fe–C внутри кластера, 2 – связь Fe–Fe вблизи атома C, 4 – связь между атомами железа в разных кластерах, 3 – связь между атомами железа в кластере, удаленном от атомов C.

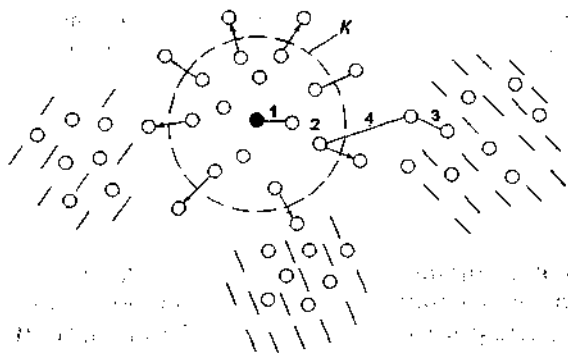


Рис. 1.14. Схема, иллюстрирующая микронеоднородность железоуглеродистого сплава

Эта схема характерна для еще не расплавленного сплава. При повышении температуры прежде всего разрываются межкластерные связи 4. Происходит предсолидусное плавление, повышается подвижность разнотипных кластеров. При достижении температуры солидуса начинают разрываться связи 3. Однако они разрываются не одновременно, процесс разрыва одних связей сопровождается восстановлением других. При этом образуются кластеры, характерные для расплавов чистого железа (заштрихованные области). Данные кластеры имеют ближний порядок, характерный для ОЦК. Вместе с этими кластерами в расплаве есть кластер, ограниченный окружностью K . Он имеет структуру ГЦК. Этот кластер обладает повышенной устойчивостью, так как образован более сильными связями. При повышении температуры разрываются сначала связи 2, а затем связи 1.

Реальные железоуглеродистые сплавы многокомпонентны. Поэтому их микронеоднородность носит еще более сложный характер.

1.6. Взаимосвязь жидкого и твердого состояний сплава

Свойства литого сплава в твердом состоянии определяются свойствами жидкого сплава и условиями его охлаждения в форме. Связь с жидким состоянием сложна и многопланова. Поэтому в данном курсе мы не будем рассматривать ее всесторонне, передавая эту задачу технологическим курсам. Рассмотрим основные принципы, определяющие эту связь. Прежде всего, механические и другие свойства сплава в твердом состоянии в значительной мере определяются его кристаллической структурой. Процесс кристаллизации предполагает возникновение в жидком расплаве зародышей новой кристаллической фазы и ее рост. Зародышеобразование непосредственно связано с наличием в жидкости кластеров и их характеристиками. Кроме того, большое значение имеет наличие в расплаве микроскопических включений различного химического состава и строения. Химическим анализом определить их наличие невозможно. Поэтому очень часто при смене поставщика шихтовых материалов при том же химическом составе выплавляемых сплавов существенно изменяются их свойства.

Зависимость свойств сплава от природы шихтовых материалов получила название «наследственность». Кроме неконтролируемого изменения содержания микропримесей наследственность можно объяснить неравновесностью жидкого состояния. Переход системы, выведенной из состояния равновесия, осуществляется самопроизвольно в течение времени релаксации. При плавлении металла расплав может находиться в неравновесном состоянии, т.е. состав и конфигурация образовавшихся кластеров не обладают минимумом энергии. Если выдержать сплав при температуре плавления достаточно долго, то в нем в конце концов установится равновесное состояние. О том, что время релаксации может быть достаточно большим, говорит хотя бы такой факт, что при вводе в расплав металлического феррохрома он не распределяется равномерно в нем даже через 20 мин.

Одним из доказательств неравновесности жидкого расплава является гистерезис свойств при нагреве и последующем охлаждении. Суть гистерезиса состоит в том, что значения свойств, полученные в измерениях в ходе нагрева сплава, не совпадают с соответствующими значениями, полученными при последующем его охлаждении. Повторные циклы измерений дают результаты, совпадающие с теми, которые получены при охлаждении сплава в первом цикле. На рис. 1.15 показан характер гистерезиса кинематической вязкости сплава. Явление гистерезиса не обнаруживается, если сплав перед измерениями подвергнуть достаточной по длительности выдержке. Гистерезис свойств можно объяснить происходящими в сплаве при нагреве превращениями, связанными с выделением из него включений либо продуктов взаимодействия компонентов газовой среды или футеровки. Дискуссии по вопросу о том, в чем основная причина гистерезиса, про-

должаются. Однако несомненно, что неравновесность состояния сплавов имеет место и ее надо учитывать при организации технологического процесса.

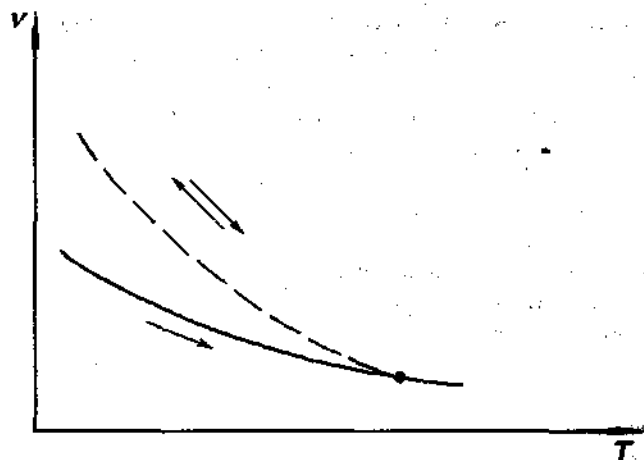


Рис. 1.15. Гистерезис кинематической вязкости

Для управления уровнем неравновесности состояния расплавов сейчас широко применяют термовременную обработку. При этом расплав перед разливкой подвергается длительной выдержке при температуре, несколько превышающей температуру заливки. Экспериментальные данные показывают, что при этом устраняется гистерезис свойств и существенно повышаются механические свойства литого сплава.

Глава 2. РЕОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЖИДКИХ И ТВЕРДЫХ СПЛАВОВ

Реология — наука, которая изучает деформации тел. Следует напомнить, что *деформация*—это изменение размеров и формы тела. Реология устанавливает связь между напряжениями, создаваемыми приложенными к телу силами, и вызываемыми ими деформациями. В теории литейных процессов идеи реологии начали использоваться не более 25–30 лет назад.

Для реальных физических объектов связь между напряжениями и деформациями можно выразить следующим уравнением: $F(\tau, \varepsilon, \dot{\varepsilon}, \ddot{\varepsilon}, \dot{\tau}, \ddot{\tau}, \dots, \tau^n) = 0$, где $\tau \dots \tau^n$ — касательные напряжения и их производные по времени; $\varepsilon \dots \varepsilon^n$ — относительные деформации и их производные по времени.

2.1. Простейшие реологические модели тел

Простейшим в реологическом отношении твердым телом является тело Гука (тело H), для которого характерна линейная связь между напряжениями и относительными деформациями. Как известно, на законе Гука основывается такая наука, как сопротивление материалов. В соответствии с этим законом при одноосном растяжении $\sigma = E\varepsilon$, а при сдвиге $\tau = \gamma G$, где σ — нормальное (приложенное перпендикулярно площадке) напряжение; τ — касательное, т.е. действующее в параллельной плоскости, напряжение; ε — относительная деформация растяжения ($\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$), т.е. отношение увеличения длины образца к его первоначальной длине; γ — относительная деформация при сдвиге; E — модуль упругости при растяжении (модуль Юнга); G — модуль упругости при сдвиге.

Относительную деформацию при сдвиге можно определить в соответствии со схемой (рис. 1.16). Модуль упругости при сдвиге связан с модулем Юнга следующей зависимостью: $G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$, где μ (коэффициент Пуассона) — отношение поперечной относительной деформации при сжатии растягиваемого образца (поперечное сужение) к относительной деформации растяжения (для алюминия $\mu=0,33$, для стали $\mu=0,28$, для бронзы $\mu=0,35$). При растяжении $\sigma = \frac{F}{S}$, где F — действующая сила; S — площадь сечения образца, перпендикулярного направлению силы. Поэтому

напряжения, создаваемые при растяжении, можно рассматривать как нормальные. При сдвиге $\tau = \frac{F}{S}$, где F – действующая сила, вектор которой

лежит в плоскости S . Поэтому напряжение τ называется касательным. В сложных случаях нагружения действующие силы создают одновременно и нормальные, и касательные напряжения.

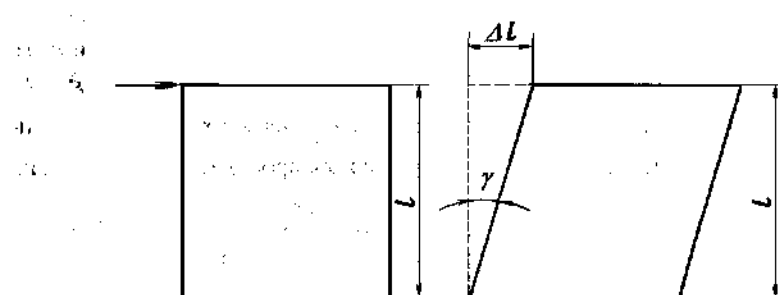


Рис. 1.16. Схема деформации при сдвиге

В системе координат «напряжение–деформация–время» поведение тела Гука иллюстрирует схема, приведенная на рис. 1.17. При приложении нагрузки в теле мгновенно возникают упругие деформации, пропорциональные напряжениям. В процессе выдержки они не меняются. При снятии

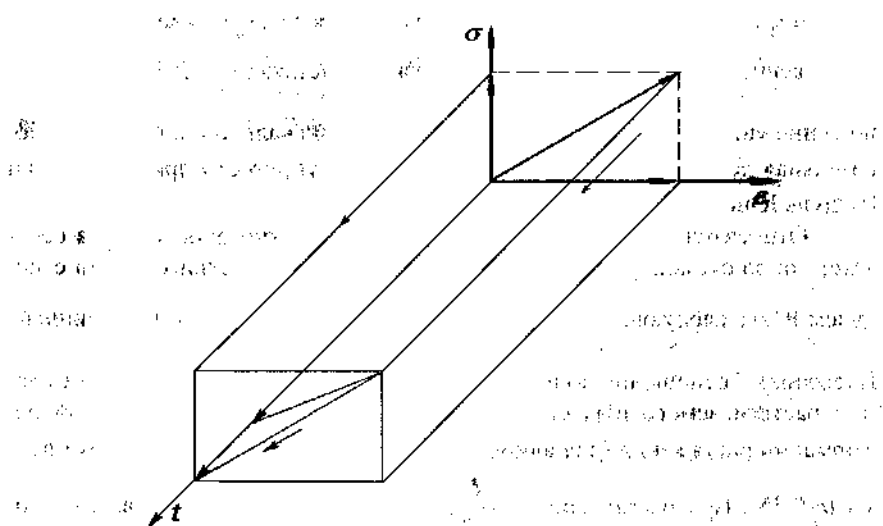


Рис. 1.17. Поведение тела Гука при нагружении и разгрузке

нагрузки размеры тела возвращаются в исходное положение. В качестве механической аналогии тела Гука в реологии принята спиральная пружина, изображенная на рис. 1.18.

Естественно, что механическое поведение твердых тел не исчерпывается моделью Гука, и с более сложными реологическими законами твердых тел мы познакомимся в дальнейшем. Сейчас же перейдем к рассмотрению реологических законов жидкостей.

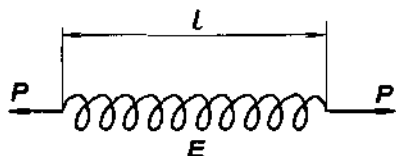


Рис. 1.18. Схема тела Гука (H-тела)

С точки зрения механического поведения жидкости отличаются от твердых тел текучестью и малой сжимаемостью. *Текучесть* — свойство тела развить сколь угодно большие деформации под действием сколь угодно малых напряжений. В твердом теле под действием приложенных усилий развивается напряженное состояние, которое характеризуется наличием касательной и нормальной составляющей (рис. 1.19, а). Касательное напряжение τ вызывает деформацию сдвига слоев тела вдоль плоскости mn . Напряжения носят упругий характер до тех пор, пока они не превзойдут некоторой величины, называемой *пределом текучести*. При этом часть тела A начнет смещаться, т.е. течь относительно тела B по плоскости mn .

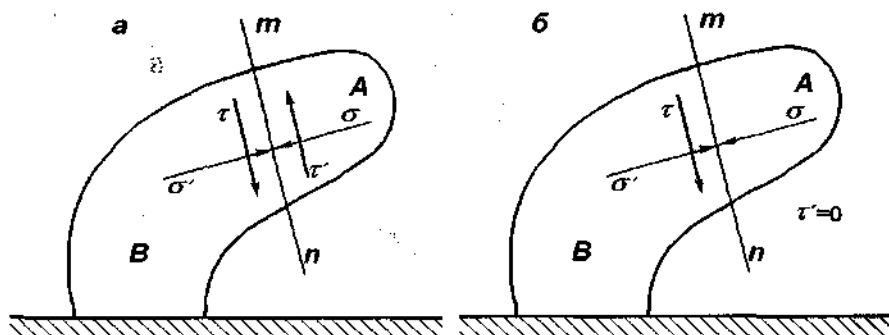


Рис. 1.19. Схема, поясняющая текучесть:
а — исходное положение; б — начало смещения (течения)

Жидкость в отличие от твердого тела в состоянии покоя не может развивать касательных напряжений, т.е. напряжения в ней (давления) всегда ориентированы перпендикулярно к площадке. Поэтому в жидкости могут развиваться только нормальные напряжения. В силу этого касательные составляющие приложенных к жидкости сил не могут быть уравновешены напряжениями и, какова бы ни была величина этих усилий, они приведут к неограниченному смещению тела A относительно тела B , т.е. к течению (рис. 1.19, б). Можно сказать, что жидкость – это среда, предел текучести которой равен нулю. Именно поэтому жидкость не имеет своей формы, а принимает всегда форму сосуда. Если ее предоставить самой себе в условиях поля тяжести Земли, то она растечется до слоя, толщина которого имеет порядок размеров молекулы или атома. В отличие от газов жидкость не занимает всего предоставленного ей объема сосуда. Она имеет четко выраженную поверхность раздела с воздухом.

В движущейся жидкости между отдельными ее слоями, имеющими разные скорости, возникают силы трения, препятствующие смещению слоев. Так как эти силы лежат в плоскости контакта слоев, то они создают касательные напряжения. Рассмотрим поток жидкости в трубе. Скорости точек жидкости в любом ее поперечном сечении распределены неравномерно. На оси трубы скорость имеет максимальное значение, а на поверхности контакта жидкости и трубы она равна нулю.

Характер распределения скорости по сечению трубы (эюра скоростей) показан на рис. 1.20. Выделим в жидкости два слоя толщиной dr , поверхность контакта которых AB представляет собой цилиндр радиуса r .

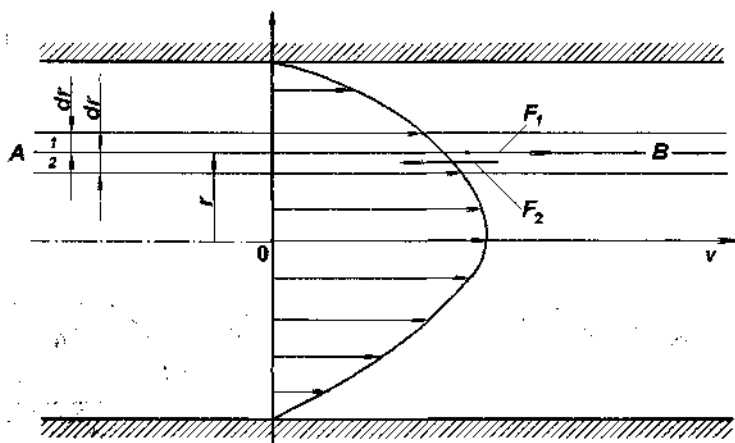


Рис. 1.20. Эюра скоростей в потоке жидкости

Вдоль поверхности AB действует сила трения F_2 , приложенная к слою 2,двигающемуся с большей скоростью, и сила F_1 , приложенная к слою 1, имеющему меньшую скорость. Видно, что сила трения стремится увеличить скорость медленнодвигающегося слоя и уменьшить скорость быстродвигающегося слоя.

Закон трения в жидкостях впервые был сформулирован Ньютоном:

$F = \eta S \frac{dv}{dr}$, где η – динамический коэффициент вязкости жидкости; S –

площадь контакта слоев; $\frac{dv}{dr}$ – градиент скорости. Разделим обе части

формулы Ньютона на площадь контакта слоев S . В результате получаем

$\tau = \eta \frac{dv}{dr}$, где τ – касательное напряжение. Величину $\frac{dv}{dr}$ преобразуем,

приняв, что $v = \frac{dl}{dt}$; $\frac{dv}{dr} = \frac{d \frac{dl}{dt}}{dr}$, где $\frac{dl}{dr} = \gamma$ – относительная деформация

при сдвиге, а $\frac{d\gamma}{dt} = \dot{\gamma}$ – скорость деформации. Значит, $\tau = \eta \dot{\gamma}$. Это

реологический закон ньютоновской жидкости, или тела Ньютона. Суть его в том, что касательные напряжения в движущейся ньютоновской жидкости пропорциональны скорости деформации, а не самой деформации, как у тела Гука. Графически этот закон изображен на рис. 1.21. На рисунке

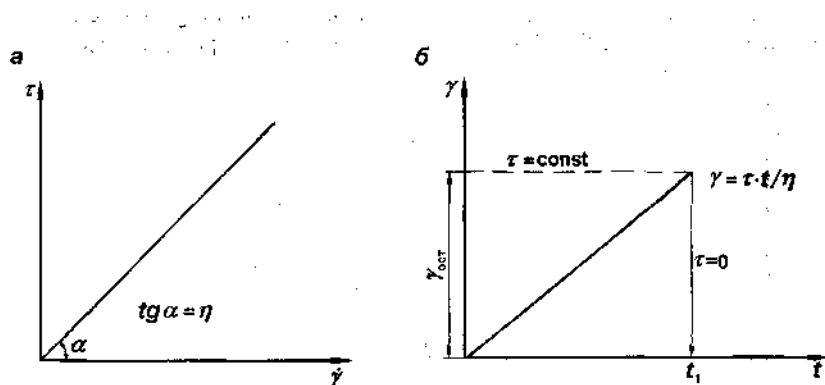


Рис. 1.21. График изменения напряжения (а) и поведения тела Ньютона (б) при постоянной нагрузке ($\tau = \text{const}$)

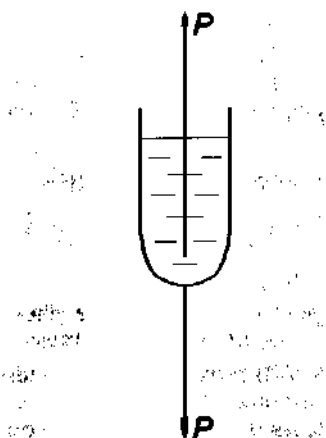


Рис. 1.22. Схема тела Ньютона (*N*-тела)

видно, что, как бы ни были малы напряжения, наступает вязкое течение материала. При этом абсолютная деформация непрерывно растет во времени. При снятии напряжения течение прекращается, но накопленная деформация сохраняется. Таким образом, вязкое течение приводит к необратимым остаточным деформациям. Вязкость жидкости является ее важнейшим физико-химическим свойством. Графически тело Ньютона (*N*-тело) изображено на рис. 1.22.

Поведение жидкостей не исчерпывается реологическим законом тела Ньютона. Имеется класс жидкостей, описываемых другими законами и называемых *неньютоновскими жидкостями*. Простейшей неньютоновской жидкостью является тело Бингама, или Бингамов пластик, а также тело Сен-Венана. Тело Сен-Венана (*S*-тело) на-

зывается *пластическим телом*. Реологическое уравнение *S*-тела имеет вид $\sigma = \sigma_s$ для растяжения и $\tau = \tau_s$ для сдвига. Здесь σ_s — предел текучести при растяжении и τ_s — предел текучести при сдвиге. При напряжении, меньшем предела текучести, тело Сен-Венана является абсолютно твердым упругим телом. При $\sigma = \sigma_s$ (или $\tau = \tau_s$) материал пластически течет со скоростью, равной скорости деформирования (при штамповке, например, со скоростью движения пуансона). При этом, несмотря на увеличение нагрузки, напряжение не возрастает. В качестве механической аналогии тела Сен-Венана в реологии принят элемент сухого трения. Графически поведение

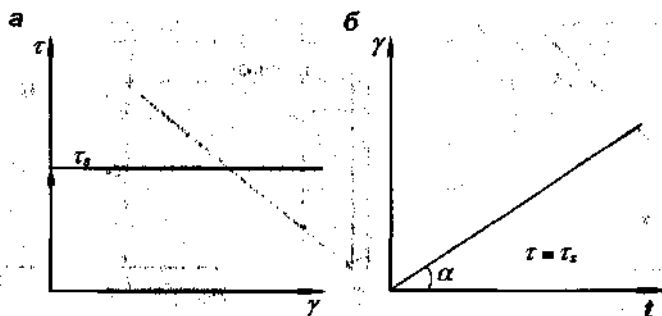


Рис. 1.23. Зависимость $\tau(\gamma)$ (а) и поведение тела Сен-Венана при $\tau = \tau_s$ (б)

S-тела показано на рис. 1.23. Тангенс угла α на рисунке равен скорости деформирования.

Тело Бингама (B-тело) представляет собой параллельно соединенные тела Ньютона и Сен-Венана, последовательно включенные с телом Гука. B-тело называется вязкопластичной жидкостью (рис. 1.24).

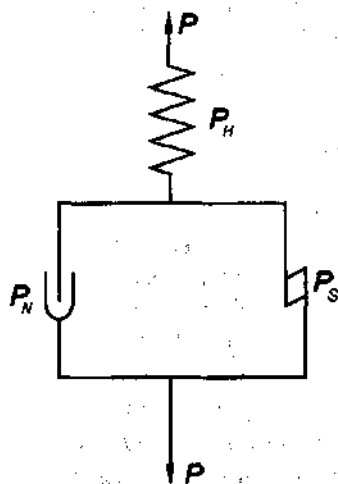


Рис. 1.24. Схема тела Бингама (B-тела)

При последовательном соединении элементов их напряжения одинаковы и равны приложенным напряжениям, т.е. $\tau = \tau_H = \tau_{SN}$, где τ_H — напряжение элемента Гука; τ_{SN} — напряжения параллельной комбинации тел Ньютона и Сен-Венана. Деформации элементов при этом могут быть различными. Общая деформация равна сумме деформаций отдельных последовательно соединенных элементов. Таким образом, $\gamma = \gamma_H + \gamma_{SN}$ (рис. 1.25).

При параллельном соединении деформации обоих элементов одинаковы, а сумма их напряжений равна приложенному к системе напряжению. Для указанной схемы $\gamma_{SN} = \gamma_N = \gamma_S$ и $\tau = \tau_H = \tau_N + \tau_S$. При $\tau < \tau_S$ $\gamma_{SN} = 0$ и $\gamma = \gamma_H + \gamma_{SN} = \gamma_H$.

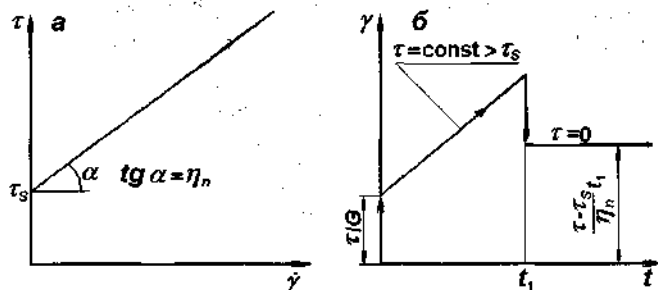


Рис. 1.25. Зависимость $\tau(\gamma)$ (а) и поведение B-тела при $\tau > \tau_s$ (б)

При $\tau \geq \tau_s$ $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_{SN} + \dot{\gamma}_H = \frac{\tau_N}{\eta_N}$; $\tau_N = \tau - \tau_s$ и $\dot{\gamma} = \frac{\tau - \tau_s}{\eta_N}$. Отсюда полу-

чаем, что $\tau = \tau_s + \eta_N \dot{\gamma}$. Это реологический закон В-тела. Величина τ_s называется предельным касательным напряжением сдвига, а η_N — структурной динамической вязкостью тела. К телам Бингама можно отнести переохлажденные нефти, масла, битумы, суспензии и переохлажденные сплавы при температурах, относительно близких к температуре ликвидуса.

Описание реологического поведения реальных тел не исчерпывается представленными моделями. Более сложные модели будут рассмотрены в соответствующих разделах курса.

2.2. Вязкость перегретых жидких сплавов

Исследования течения расплавленных металлов и сплавов при температуре выше температуры ликвидуса показали, что жидкие сплавы по своему поведению близки к вязким ньютоновским жидкостям. Важнейшей характеристикой жидких металлов и сплавов является их вязкость. Вязкость есть свойство жидкостей оказывать сопротивление взаимному смещению слоев. Разрешив реологический закон ньютоновских жидкостей относительно динамического коэффициента вязкости η , найдем его размерность в СИ: $[\eta] = \text{Н} \cdot \text{с} / \text{м}^2 = \text{Н} \cdot \text{с} / \text{м}^2$. В системе CGS $[\eta] = \text{дин} \cdot \text{с} / \text{см}^2$; эта единица называется пуаз. Легко получить соотношение между единицами: $1 \text{ Н} \cdot \text{с} / \text{м}^2 = 10 \text{ пуаз} = 1000 \text{ сантипуаз}$, где сантипуаз — сотая доля пуаза.

В гидродинамике большое значение имеет кинематический коэффициент вязкости $\nu = \eta / \rho$. Его размерность в СИ — $\text{м}^2 / \text{с}$, в CGS — $\text{см}^2 / \text{с}$. Видно, что $1 \text{ м}^2 / \text{с} = 10^4 \text{ Стокс}$. Стокс — название размерности ν в системе CGS. Сотая доля стокса называется сантистокс.

Динамический коэффициент вязкости жидких металлов и сплавов имеет порядок от $1,8 \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{с} / \text{м}^2$ (у олова) до $7,4 \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{с} / \text{м}^2$ (у чугуна). Кинематический коэффициент вязкости охватывает значения от $0,26 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 / \text{с}$ (у олова) до $(1,2—1,6) \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 / \text{с}$ (у алюминия). Для сравнения приведем данные по вязкости воды при комнатной температуре: $\eta = 1,05 \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{с} / \text{м}^2$ и $\nu = 1,05 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 / \text{с}$. Видно, что вязкость ν у металлических расплавов близка к кинематической вязкости воды.

Вязкость характеризует текучесть жидкости, которая равна $1/\eta$. Приведенные данные показывают, что жидкие металлы обладают хорошей текучестью. По Я.И. Френкелю, который рассматривает жидкость как среду с повышенной концентрацией вакансий (дырок), в жидкости колебательное движение атомов относительно некоторых положений равновесия

сочетается с трансляционным поступательным движением атомов (трансляция дырок и дислоцированных атомов). Очевидно, что, чем меньше время оседлой жизни атома, тем больше текучесть и меньше вязкость.

В связи с этим для вычисления динамического коэффициента вязкости Я.И. Френкель предложил следующую формулу: $\eta = A \cdot e^{\frac{E}{RT}}$, где E – энергия активации вязкого течения (для чистых металлов $E = 7-50$ кДж/(г · атом)); A – предэкспоненциальный множитель, зависящий от расстояний между частицами в жидкости, частоты колебаний атомов и т.п. Из формулы видно, что вязкость с повышением температуры уменьшается. Экспериментальные данные показывают, что в определенном температурном интервале зависимость η от температуры удовлетворительно описывается формулой Я.И. Френкеля. Однако в предкристаллизационный период и при значительных перегревах наблюдаются существенные отклонения. На рис. 1.26 приведен характер изменения вязкости жидкого алюминия в предкристаллизационной области. Видно, что при температурах, близких к $T_{кр}$, вязкость металла резко увеличивается. Аналогичная картина имеет место и у сплавов.

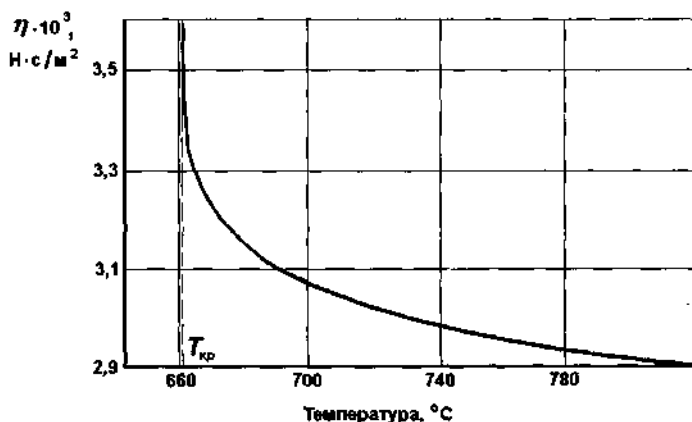


Рис. 1.26. Зависимость динамического коэффициента вязкости η жидкого алюминия от температуры

С позиций современной кластерной теории жидкого состояния характер изменения вязкости с повышением температуры можно объяснить следующим образом. После расплавления жидкость имеет микронееднородное строение, характеризующееся наличием кластеров, взаимодействующих с областями межкластерных разрывов. В сплавах существуют кластеры разного типа и разной устойчивости. Лавинный рост вязкости

вблизи температуры кристаллизации (для алюминия начиная с температуры 670 °С) можно объяснить большой концентрацией кластеров, при которой они образуют непрерывную сетку (каркас), и малым объемом межкластерных разрывов (1÷6%), что приводит к низкой подвижности кластеров. Жидкость имеет при этом структуру в виде квазикаркаса поликластеров.

С повышением температуры устойчивые кластеры дробятся на монокластеры, размеры которых на порядок меньше, что приводит к резкому падению вязкости. Силы связи между кластерами уменьшаются, и вязкость плавно убывает по экспоненте. При некоторой температуре, называемой *температурой разупорядочения*, кластеры разрушаются. Жидкость имеет структуру однородной среды статистически распределенных атомов, между которыми велики еще силы взаимодействия. Вязкость при этом убывает с ростом температуры близко к линейному закону. Таким образом, вязкость является структурно чувствительным свойством и по характеру ее температурного изменения можно судить о структурных превращениях в жидких расплавах.

Исследованиями обнаружена четкая корреляция вязкости с объемом, приходящимся на один атом жидкого металла V_{am} . Кинематическая вязкость ν большинства металлов при температурах, близких к температуре затвердевания, удовлетворительно описывается функцией $\nu = K/V_{am}$, где K – коэффициент, приблизительно равный 4÷5. Соотношение между ν и V_{am} показано на рис. 1.27 для целого ряда жидких металлов. Связь вязко-

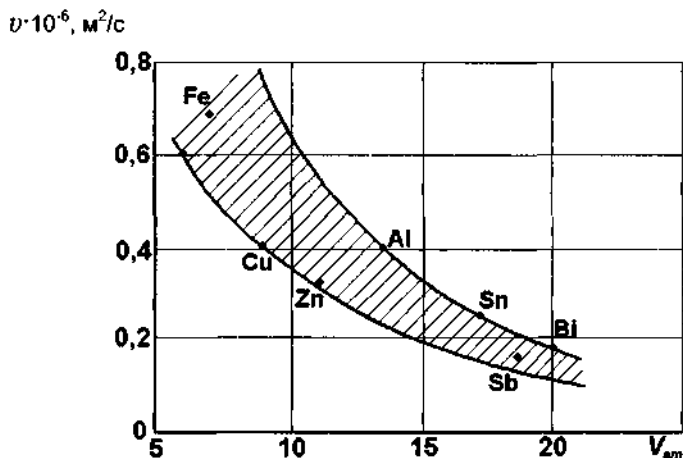


Рис. 1.27. Зависимость кинематической вязкости ν жидких металлов от их атомарного объема

сти с величиной свободного объема металла, не занятого атомами, выражает эмпирическая формула А.И. Бачинского $\eta = \frac{c}{V_{\text{ат}} - \omega}$, где c и ω – эмпирические коэффициенты, не зависящие от давления и температуры. Величина ω характеризует собственный объем атомов, а разность $(V_{\text{ат}} - \omega)$ – величину свободного объема.

Смысл указанных формул сводится к тому, что с увеличением расстояния между атомами или кластерами возрастает их подвижность и уменьшается вязкость. Подобная связь со свободным объемом позволяет интерпретировать влияние давления на вязкость.

Увеличение давления приводит к уменьшению свободного объема и увеличению вязкости. Эту зависимость можно описать формулой $\eta = \eta_1 \cdot e^{\beta P}$, где η_1 – вязкость при атмосферном давлении ($P=0,1$ МПа); η – вязкость при давлении P ; β – коэффициент, равный $1/30 \div 1/50$. Эта формула удовлетворительно описывает изменение вязкости неметаллических жидкостей. У металлов коэффициент β значительно меньше. Поэтому темп нарастания вязкости с увеличением давления мал. Например, при увеличении давления с 1 до 1200 атм (120 МПа) вязкость жидкой ртути возрастает всего в полтора раза.

При легировании металлов, т.е. при образовании сплавов, вязкость изменяется по сложным законам. Если сплаваемые компоненты образуют идеальный раствор (силы взаимодействия компонентов A и B в бинарном растворе $F_{AA} \approx F_{BB} \approx F_{AB}$), то вязкость раствора линейно связана с его концентрацией, выраженной в мольных долях, в соответствии с формулой $\eta = X_A \eta_A + X_B \eta_B$, где η_A и η_B – вязкости чистых компонентов при данной температуре, X_A и X_B – мольные доли компонентов. Этому случаю соответствует диаграмма, характеризующая непрерывный ряд твердых растворов.

На рис. 1.28 изображен характер зависимости η таких сплавов от концентрации, выраженной в атомных процентах. Линия 1 отвечает случаю, когда $\eta_A > \eta_B$, а линия 2 – $\eta_A < \eta_B$. Реально зависимость может отклоняться от линейной, но ее характер сохраняется. Такое поведение вязкости сплавов соответствует описанной выше структуре жидких сплавов подобного типа.

У сплавов с образованием интерметаллических соединений на кривой зависимости вязкости от концентрации наблюдается максимум, отвечающий составу интерметаллида. Этим сплавам соответствуют следующие соотношения сил взаимодействия: $F_{AB} > F_{AA}$, $F_{AB} > F_{BB}$, что, как было показано выше, приводит к усилению микрогетерогенности расплава, особенно возрастающей при концентрации, отвечающей составу интерметаллида (кластеры имеют структуру и состав, отличающиеся от соответствующих

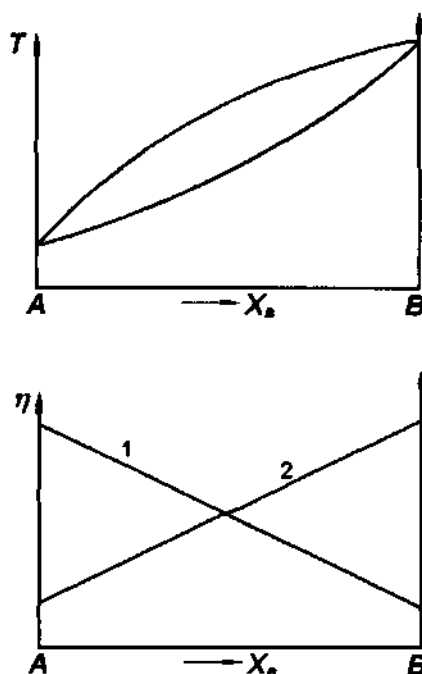


Рис. 1.28. Зависимость вязкости сплавов с неограниченной растворимостью компонентов в твердом состоянии от состава

характеристик жидких компонентов). Характер такой зависимости приведен на рис. 1.29. Как видно из рисунка, по мере повышения температуры максимумы сглаживаются, так как происходит ослабление связей и распад соединений. Если линии относить к одинаковым перегревам над ликвидусом, то значительные максимумы не наблюдаются (в примере, изображенном на рисунке, соединение наиболее тугоплавкое, и при одинаковой для всех составов температуре ему будет соответствовать наименьший перегрев над ликвидусом).

Подобный характер изменения вязкости имеет место, если интерметаллид образуется непосредственно из жидкого состояния, а не при затвердевании. В последнем случае максимум не наблюдается (например, в сплавах серебра с оловом).

В заключение рассмотрим характер зависимости вязкости сплавов с эвтектическим превращением от их состава. В данных системах наименьшей вязкостью обладают сплавы эвтектического состава. Это можно объяснить тем, что в таких сплавах $F_{AB} < F_{AA}$; $F_{AB} < F_{BB}$, т.е. имеет место слабое взаимодействие между разнородными атомами. Кроме того, при заданной

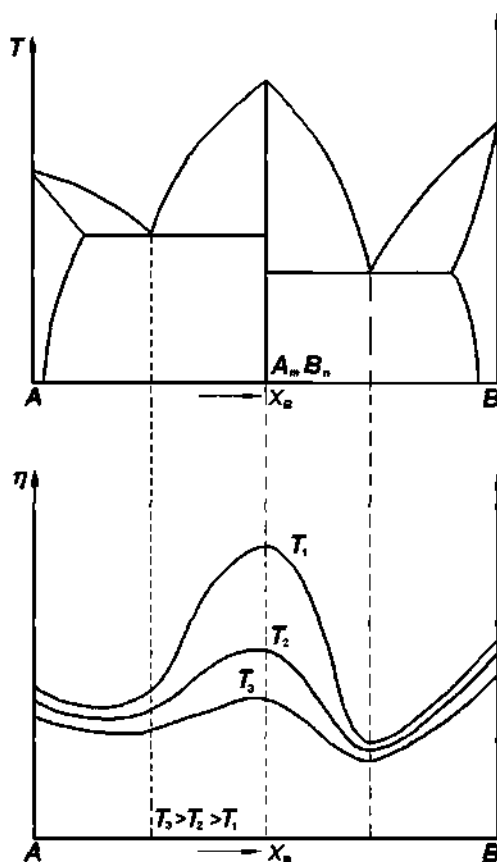


Рис. 1.29. Зависимость вязкости сплавов с интерметаллидами от состава

температуре эвтектические сплавы имеют наибольший перегрев над ликвидусом. На рис. 1.30 приведены кривые изменения вязкости в сплаве системы алюминий–медь.

В вопросе зависимости вязкости сплавов от концентрации еще имеется много противоречий, особенно для сплавов с ограниченной растворимостью в твердом состоянии.

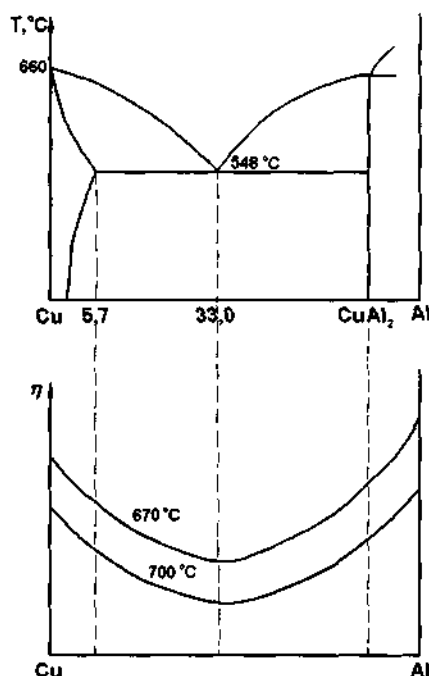


Рис. 1.30. Зависимость вязкости сплавов с эвтектическим превращением от состава и температуры перегрева

2.3. Реологические свойства сплава в интервале кристаллизации

При охлаждении сплава ниже температуры ликвидуса из жидкого раствора начинают выпадать кристаллы твердого раствора. При этом в равновесных условиях количество выделившейся твердой фазы при любом значении температуры внутри интервала кристаллизации можно определить по правилу рычага. По мере уменьшения температуры относительная массовая доля твердых включений в расплаве непрерывно увеличивается. Таким образом, расплав при температуре, меньшей температуры ликвидуса, представляет собой суспензию, концентрация которой при охлаждении увеличивается. Если в суспензии расстояния между твердыми частицами значительно превышают размеры частиц, то такая суспензия в реологическом плане представляет собой ньютоновскую жидкость, обладающую некоторой эффективной вязкостью.

Впервые формула для расчета вязкости суспензий была получена А. Эйнштейном для сферических твердых включений. Формула имеет вид $\eta = \eta_0(1 + 2,5\chi)$, где η_0 – динамический коэффициент вязкости диспергированной среды; $\chi = 4\pi r^3 n / 3$ – отношение суммарного объема всех включений к полному объему суспензии; r – радиус включения; n – число включений в единице объема суспензии. Для кристаллитов произвольной формы формула имеет вид $\eta = \eta_0(1 + k\chi)$, где χ – относительный объем суспендированного вещества; k – коэффициент, зависящий от формы включений. Для сферических включений $k=2,5$; для эллипсоидных включений $\chi = 4ab^2 n \pi / 3$.

По мере увеличения отклонений от $\frac{a}{b} = 1$ коэффициент k увеличивается.

Например, при $a/b=1$ $k=2,5$, при $\frac{a}{b} = 0,1$ $k=8,04$ и при $\frac{a}{b} = 10$ $k=13,6$.

Таким образом, наличие в жидкости суспендированных включений приводит к увеличению ее вязкости. На вязкость оказывает влияние не только относительный суммарный объем включений, но и их форма. При этом вязкость тем больше, чем сильнее отклонение формы включений от сферической.

Формула А. Эйнштейна справедлива при относительном объеме твердой фазы, не превышающем некоторой предельной величины χ_{np} . Величина χ_{np} зависит от формы включений. Чем больше отклонение от сферической формы, тем меньше χ_{np} . Например, для включений инфузорной земли в воде $\chi_{np}=15\%$, а для включений графита, вследствие их меньшей округлости, $\chi_{np}=5\%$. Применимость формулы А. Эйнштейна ограничивают $\chi_{np}=8\%$.

Влияние твердых включений на вязкость необходимо учитывать не только в сплавах ниже температуры ликвидуса, но и в перегретых сплавах, всегда содержащих то или иное количество неметаллических включений. Это могут быть продукты раскисления стали (SiO_2 , MnO , Al_2O_3), графитовые включения в чугунах, продукты окисления алюминия (Al_2O_3), магнезия (MgO), титана (TiO_2) и т.п. Кроме того, включения могут попадать в расплав вследствие разрушения формы, огнеупоров и т.п. Например, при плавке чугуна с использованием в шихте высококремнистых литейных чугунов в нем содержится много включений графитовой спели. При этом сильно возрастает вязкость, что приводит к резкому снижению заполняемости форм чугуном даже при его высоком перегреве.

При снижении температуры сплава в интервале кристаллизации ниже некоторой критической температуры T_1 , соответствующей критическому содержанию твердой фазы χ_{np} , формула А. Эйнштейна становится несправедливой, так как расплав изменяет свою реологическую природу.

При концентрации суспензии χ_{np} , если частицы находятся на достаточно близком расстоянии друг от друга, между ними устанавливаются значительные силы взаимодействия. В результате образуется связанная структура, которая способна сопротивляться сдвиговым усилиям, если развиваемые ими касательные напряжения не превосходят некоторого предельного напряжения сдвига τ_s . Реологическое поведение сплава можно с некоторым приближением описать моделью тела Бингама ($\tau = \tau_s + \mu_n \frac{dv}{dr}$).

При снижении температуры ниже некоторой температуры $T_2 < T_1 < T_n$ между частицами остаются тонкие прослойки жидкости. Отдельные частицы приходят в контакт друг с другом. Упругие свойства образовавшейся структуры и предельное для нее напряжение сдвига τ_s возрастают более резко. В этих условиях сплав находится в состоянии пасты.

При охлаждении сплава ниже критической температуры $T_3 < T_2 < T_1 < T_n$ частицы стыкуются друг с другом, образуя пористую среду. Упругие характеристики среды и предельное напряжение сдвига резко возрастают. Жидкость при этом находится в межзеренных порах. Сначала они открыты и сообщаются друг с другом, так что возможны фильтрационные перемещения жидкости по объему тела. При температурах, близких к температуре солидуса, поры разобщаются и содержащиеся в них объемы жидкого сплава оказываются изолированными, исключая возможность фильтрации. При температуре солидуса жидкость в порах затвердевает.

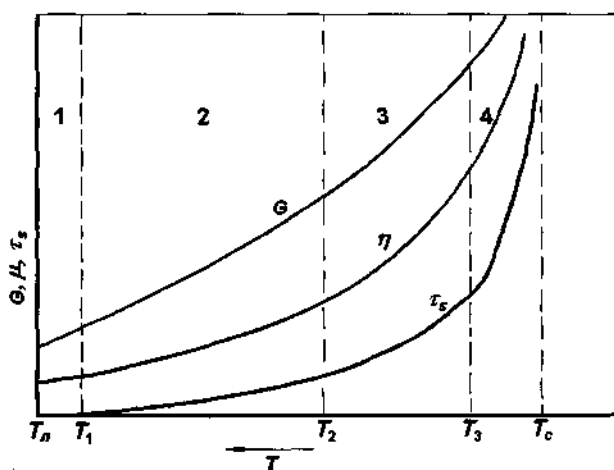


Рис. 1.31. Зависимость реологических характеристик от температуры в интервале кристаллизации

Указанные зоны состояния сплава в интервале кристаллизации и характер изменения вязкости, предельного напряжения сдвига τ_s и модуля упругости с повышением температуры показаны на рис. 1.31. В первой зоне сплав ведет себя как ньютоновская жидкость, проявляя способность к

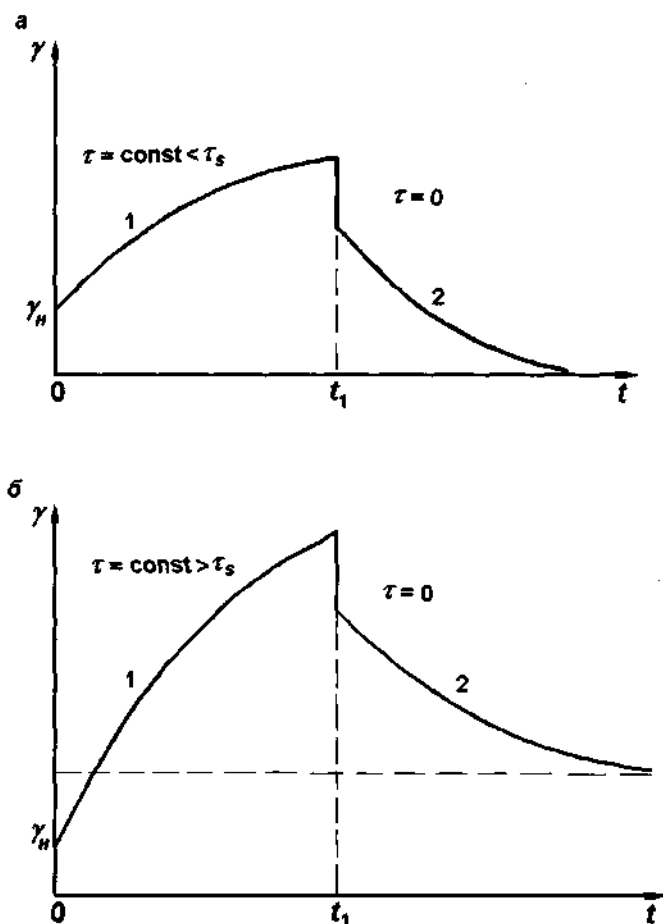


Рис. 1.32. Поведение сплава в интервале кристаллизации при $\tau < \tau_s$ (а) и при $\tau > \tau_s$ (б)

зкому течению при любых как угодно малых касательных напряжениях. Во второй температурной зоне сплав ведет себя как тело Бингама. При напряжениях, меньших предельного напряжения сдвига τ_s , среда не имеет пластической деформации и ведет себя как тело Гука. При $\tau > \tau_s$ сплав те-

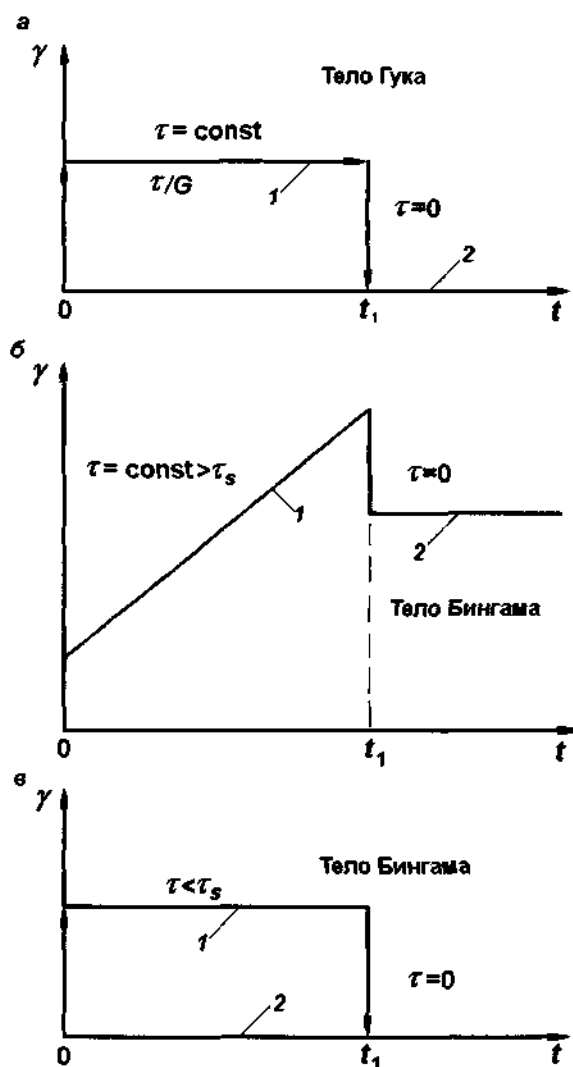


Рис. 1.33. Поведение сплава в соответствии с составляющими его моделями Гука (а) и Бингама при $\tau > \tau_s$ (б) и $\tau < \tau_s$ (в)

чет как ньютоновская жидкость, эффективная вязкость которой увеличивается с понижением температуры. В третьей зоне сплав сохраняет способность к пластическому течению при $\tau > \tau_s$, но характер его реологического поведения сложнее, чем у тела Бингама. В четвертой зоне структура ведет себя как гуковское тело вплоть до ее разрушения при достаточно больших напряжениях. При приложении давления расплав перемещается фильтрацией по межзеренным порам.

Для того чтобы установить реологическую модель сплавов в интервале кристаллизации, были проведены эксперименты по изучению зависимости величины деформации от времени при разных значениях напряжений и различных температурах. Характер полученных кривых развития деформации во времени при постоянном напряжении и заданной температуре показан на рис. 1.32. В течение времени $0 - t_1$ на сплав действует нагрузка. В момент времени $t=t_1$ нагрузка мгновенно снята, и при $t > t_1$ кривая 2 показывает поведение деформации при разгрузке образца. Анализируя характер кривых, можно сделать вывод, что мы имеем дело со сложным реологическим телом. Оно содержит упругое тело Гука, так как на рисунке мы видим мгновенную деформацию при $t=0$, которая сразу же снимается при $t=t_1$.

Изменение деформации в координатах «деформация γ – время t » показано на рис. 1.33. Видно, что тело Гука обладает только мгновенно развиваемой обратимой, т.е. исчезающей после снятия напряжения, деформацией, равной $\gamma_H = \tau/G$. Сравнивая приведенные кривые для сплава, можно заключить, что при $\tau < \tau_s$ нет остаточной деформации, а при $\tau > \tau_s$ она появляется. Следовательно, искомое тело содержит тело Бингама.

Кривые изменения деформации тела Бингама при нагрузке и разгрузке для $\tau < \tau_s$ и для $\tau > \tau_s$ приведены на рис. 1.33. Видно, что от экспериментальной кривой их отличает линейный характер зависимости. С целью придания зависимости нелинейного характера в тело нужно включить так называемое тело Кельвина, представляющее собой параллельно соединенные тела Гука и Ньютона (рис. 1.34).

Приложенное к телу напряжение вычисляется по формуле $\tau = \tau_H + \tau_N$, где τ_H – напряжение тела Гука, а τ_N – напряжение тела Ньютона. Деформации параллельно соединенных тел равны $\gamma_H = \gamma_N = \gamma$, $\gamma_H = \tau_H / G$, $\dot{\gamma} = \tau_N / \eta$ и $\tau = G\gamma + \eta \dot{\gamma}$. Приняв $\tau = \text{const}$ и преобразовав уравнение, получаем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Решаем его при начальном условии $t=0$, $\gamma \neq 0$.

$$\dot{\gamma} = -\frac{G}{\eta} \left(\gamma - \frac{\tau}{G} \right); d\gamma / \left(\gamma - \frac{\tau}{G} \right) = -G \frac{dt}{\eta},$$

$$\ln\left(\gamma - \frac{\tau}{G}\right) = -\frac{G}{\eta}t + \ln c; \ln c = \ln\left(-\frac{\tau}{G}\right);$$

$$\ln \frac{\gamma - \frac{\tau}{G}}{-\frac{\tau}{G}} = -\frac{G}{\eta}t; \gamma = \frac{\tau}{G}(1 - \exp(-\frac{G}{\eta}t)).$$

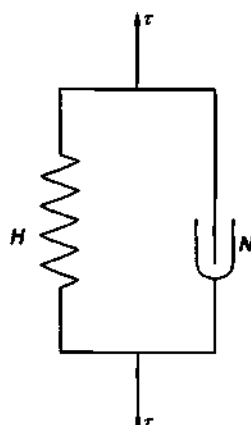


Рис. 1.34. Схема тела Кельвина (K -тела)

Аналогично можно получить формулу для изменения деформации при разгрузке (рис. 1.35). Видно, что в K -теле, в отличие от тела Гука, уп-

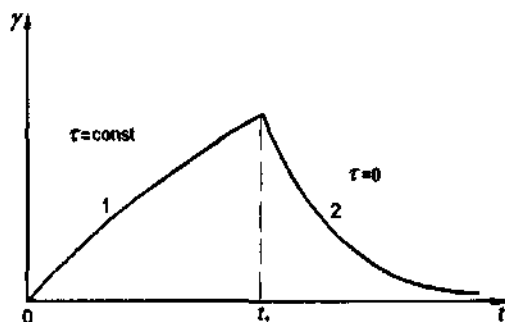


Рис. 1.35. Поведение K -тела при $\tau = \text{const}$ (1) и при разгрузке (2)

ругая деформация развивается не мгновенно. Легко убедиться, что экспериментальная форма кривой получится, если сложить кривые тел Гука, Бингама и Кельвина. Деформации складываются при последовательном соединении тел.

Таким образом, модель сплава имеет вид, показанный на рис. 1.36. Эта модель впервые была получена Г.Ф. Баландиным и Л.П. Каширцевым. Она описывает поведение сплава во всем интервале температур. Основные реологические характеристики сплава (модуль сдвига G_1 , модуль упругого последействия G_2 , пластическая вязкость η_1 , псевдовязкость Кельвина η_2 и пре-

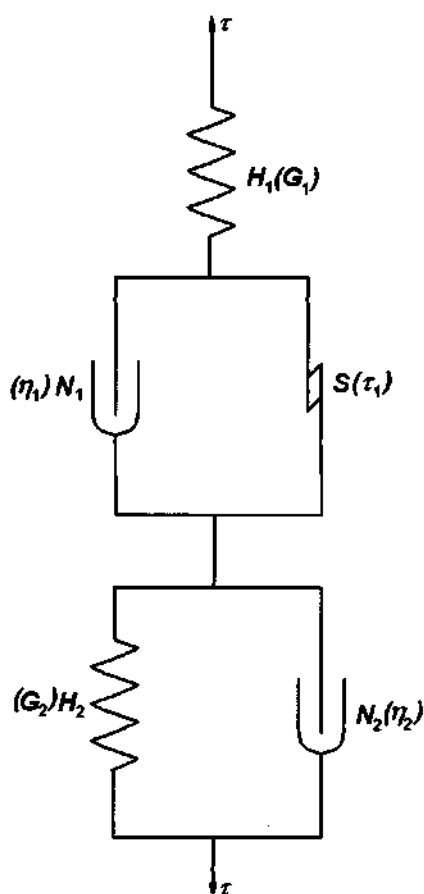


Рис. 1.36. Реологическая модель сплава

дельное напряжение сдвига (τ_s) зависят от температуры. Характер некоторых из них приведен на рис. 1.31.

Итак, деформация сплава складывается из гуковской упругой деформации γ_1 , деформации упругого последствия γ_2 и пластической деформации γ_3 , т.е. $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$. Для вычисления слагаемых можно использовать следующие формулы:

$$\gamma_1 = \frac{\tau}{G_1}; \quad \gamma_2 G_2 + \dot{\gamma}_2 \eta_2 = \tau; \quad \gamma_3 = 0, \text{ если } \tau \leq \tau_s;$$

$$\dot{\gamma}_3 = \frac{\tau - \tau_s}{\eta_1}, \text{ если } \tau > \tau_s.$$

Относительный вклад указанных деформаций в общую деформацию сплава зависит от температуры. В дальнейшем мы рассмотрим более подробно влияние реологической природы сплава на трещиностойкость сплавов в отливках.

Глава 3. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В МЕТАЛЛАХ И СПЛАВАХ

В различных технологических процессах плавки сплавов и получения отливок имеют место явления, происходящие на границах раздела жидких сплавов со шлаками, с газовой фазой и вакуумом, поверхностями песчаных и металлических форм, рафинировочными и защитными флюсами, газовыми включениями и т.п. Поверхностные явления оказывают большое воздействие на качество выплавляемых сплавов, процессы кристаллизации и формирование кристаллической структуры, обуславливают химическую неоднородность отливок, влияют на заполняемость форм, особенно для тонкостенных отливок, качество поверхности отливок и другие стороны литейного процесса. В основе этого влияния лежит факт, что состояние атомов в поверхностных слоях жидких сплавов существенно отличается от состояния атомов в объеме жидкости.

3.1. Поверхностное натяжение жидких металлов

Частицы, находящиеся во внутренних слоях жидкости, окружены другими частицами и поэтому испытывают симметричные воздействия со всех сторон, которые компенсируют друг друга. В поверхностных слоях частицы испытывают нескомпенсированные силовые воздействия притяжения со стороны ближайших «соседей», находящихся внутри жидкости.

Каждая частица, расположенная на поверхности жидкости, испытывает притяжение со стороны соседних внутренних частиц, направленное внутрь жидкости перпендикулярно ее поверхности. Для того чтобы перевести частицу из объема на поверхность, нужно совершить работу против сил притяжения. В результате энергия Гиббса поверхностных частиц больше, чем объемных, на величину указанной работы. Эта избыточная энергия Гиббса, отнесенная к единице поверхности жидкости на границе с насыщенным паром или инертным газом, называется *удельной свободной энергией* (Дж/м^2) или *поверхностным натяжением* σ . При изотермическом процессе работа по увеличению поверхности на dS равна $\delta A = -\sigma dS$ (знак «минус» показывает, что работа совершается не системой, а внешними силами над ней). Так как увеличение поверхности связано с возрастанием свободной энергии, то оно не может происходить самопроизвольно. С другой стороны, уменьшение поверхности снижает свободную энергию и может протекать самопроизвольно. Поэтому жидкость стремится принять конфигурацию с минимальной в данных условиях поверхностью.

Силы поверхностного натяжения F направлены по нормали к любому элементу dl периметра поверхности жидкости и являются касательными к ней. Численно поверхностное натяжение равно $\sigma = \frac{dF}{dl}$. Его величину

можно оценить по работе, затрачиваемой против сил межчастичного взаимодействия при обратимом изотермическом разрыве столба жидкости сечением в единицу площади, называемой *когезией* W_k . Очевидно, что в этом случае вместо одной фазы образуются две со своими поверхностями. Значит, $W_k = 2\sigma$. Для большинства металлов характерно уменьшение поверхностного натяжения с увеличением молярного объема. Металлы отличаются большим по сравнению с неметаллическими жидкостями поверхностным натяжением. Так, поверхностное натяжение калия – 102 мДж/м², цинка – 760, алюминия – 860, меди – 1350, магния – 560 и железа – 1860 мДж/м². Для сравнения у воды $\sigma = 75,5$ мДж/м². Характерно увеличение σ с ростом температуры плавления металла. Обобщенно зависимость σ от молярного объема и температуры плавления описывается формулой Шитила $\sigma = \frac{KT_m}{V_x^{2/3}}$. Более точно ее можно вычислить по формуле

$\sigma = 3,7 \frac{T_m}{V_x^{2/3}} + 140$. Например, для железа $\sigma = 3,7 \cdot 1801 \cdot 7,1/55,85 + 140 = 1820$ мДж/м² (здесь T_m имеет размерность К).

Большую величину поверхностного натяжения у металлов объясняют наличием в них свободных электронов. Значительную часть избыточной поверхностной энергии металлов составляет электростатическая энергия двойного электрического слоя, возникающего за счет выхода электронного газа за пределы металла.

С увеличением температуры поверхностное натяжение металлов убывает, стремясь к нулю при температуре абсолютного кипения. Коэффициент температурной зависимости σ невелик и составляет для калия 0,07 мДж/(м²·К), для цинка – 0,65, для железа – 0,35 и для алюминия – 0,15 мДж/(м²·К).

3.2. Поверхностное натяжение сплавов

Сплавы представляют собой высокотемпературные растворы. В растворах силы взаимодействия между различными частицами неодинаковы, атомы и молекулы с более слабыми силовыми полями вытесняются в поверхностный слой, так как это соответствует минимуму свободной энер-

гин. Если добавляемый компонент понижает поверхностное натяжение растворителя, то он вытесняется в поверхностный слой, так как при этом уменьшается избыточная свободная энергия поверхностного слоя. Концентрация такого компонента на поверхности будет больше, чем в объеме. Этому будет препятствовать диффузия, стремящаяся выровнять концентрации. В результате устанавливаются некоторые равновесные значения концентраций на поверхности и в объеме.

Превышение поверхностной концентрации над объемной выражает уравнение Гиббса $\Gamma = -\frac{c}{RT} \left(\frac{d\sigma}{dc} \right)_T$. Видно, что если $\frac{d\sigma}{dc} < 0$ (поверхност-

ное натяжение при увеличении концентрации компонента уменьшается), то $\Gamma > 0$, т.е. концентрация в поверхностном слое больше, чем в объеме. Такие вещества называются *поверхностно-активными*. В противном случае (поверхностное натяжение при увеличении концентрации компонента

увеличивается, $\frac{d\sigma}{dc} > 0$) компонент вытесняется с поверхности в объем.

Такие вещества называются *поверхностно-инактивными*. Во многих случаях поверхностная активность связана с различием атомных объемов растворителя и растворенного компонента. Если атомные объемы существенно различаются, то растворенное вещество является поверхностно-активным. В случае если атомные объемы компонентов близки, растворенное вещество является поверхностно-инактивным.

Поверхностная активность играет большую роль в процессах кристаллизации. Кроме того, управление поверхностным натяжением растворов в формовочных смесях позволяет воздействовать на такое их важное свойство, как текучесть.

Теория поверхностного натяжения растворов очень сложна, и ее изложение выходит за рамки курса. Поэтому в заключение приведем фактические данные о влиянии легирующих компонентов на поверхностное натяжение сплавов на основе железа, алюминия и магния. Углерод, кремний, марганец, хром, фосфор, сера, кислород, азот снижают поверхностное натяжение железа. При этом их поверхностная активность убывает в направлении $S > O > P > Mn > Si > C$. Поверхностно-активными в железоуглеродистых сплавах являются следующие элементы, часто используемые как модификаторы, измельчающие зерно и управляющие его морфологией: цезий, кальций, натрий, цирконий, бор, алюминий. В сплавах, не содержащих серу, магний является поверхностно-активным веществом. Однако если в сплаве есть кислород и сера, то магний, раскисляя сплав ($FeO + Mg = MgO + Fe$) и переводя серу из раствора в сульфид магния ($S + Mg = MgS$), увеличивает σ , так как кислород и сера – сильные поверхностно-активные приме-

си. Если магния в сплаве больше, чем нужно для раскисления и десульфурации, то избыточный магний растворяется в сплаве и понижает его поверхностное натяжение как поверхностно-активное вещество. В качестве примеров поверхностно-инактивных веществ можно привести титан, ванадий и молибден.

В алюминиевых сплавах поверхностно-активными добавками являются кремний, цинк, магний, натрий, литий. Введение даже сотых долей процента этих элементов приводит к сильному понижению σ . Так, например, введение 0,1% натрия снижает поверхностное натяжение с 849 до 619 мДж/м².

В магниевых сплавах поверхностно-активными являются висмут, свинец, сурьма, а поверхностно-инактивными – марганец, цинк, никель, германий.

3.3. Капиллярные явления. Смачиваемость

Форма, которую принимает свободная поверхность жидкости, зависит от сил поверхностного натяжения, от взаимодействия с ограничивающими поверхностями, а также от действующей на жидкость силы земного тяготения. Наблюдающиеся в этих случаях явления получили название *капиллярных*. Они обусловлены тем, что благодаря действию сил поверхностного натяжения давление внутри жидкости может отличаться от внешнего давления пара или газа на некоторую величину P_k .

Из физики известно, что $P_k = \sigma(1/R_1 + 1/R_2)$, где R_1 и R_2 – главные радиусы поверхности. Если поверхность сферическая, то $R_1 = R_2 = R$ и $P_k = 2\sigma/R$. Необходимо также учесть, что $R > 0$, когда поверхность выпуклая и $R < 0$, когда она вогнутая. Если молекула жидкости находится на границе с твердой стенкой сосуда, то она взаимодействует со своими ближайшими соседями как в жидкости, так и в стенке. Если сильнее взаимодействие с молекулами твердой стенки, чем с молекулами жидкости, то молекулы будут самопроизвольно переходить из объема на поверхность. При этом поверхность жидкости увеличится, жидкость растечется по стенке, образуя каплю.

На горизонтальной поверхности жидкость растечется, на вертикальной поверхности молекулы станут «вползать» на стенку, образуя вогнутый мениск. Так как при этом будет затрачиваться энергия на увеличение поверхности, то при некотором угле θ , называемом краевым углом, наступит равновесие. Угол θ зависит от соотношения сил взаимодействия молекул

жидкости с молекулами стенки и между собой. При смачивании $0 \leq \theta \leq \pi/2$ (рис. 1.37, а). При $\theta=0$ имеем полное смачивание.

Если силы взаимодействия между молекулами жидкости больше, чем между жидкостью и твердым телом, то частицы будут переходить с поверхности в объем. Поверхность станет сокращаться, и картина контакта жидкости с вертикальной поверхностью будет иметь вид, показанный на рис. 1.37, б. В этом случае мы имеем дело с несмачиванием. Краевой угол при несмачивании $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$.

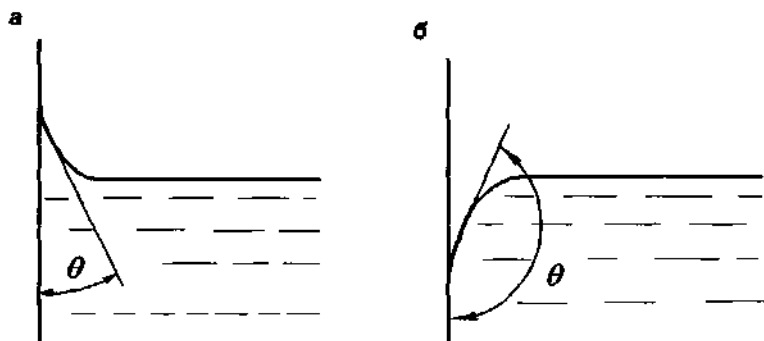


Рис. 1.37. Форма поверхности жидкости у вертикальной стенки при смачивании (а) и при несмачивании (б)

Следует отметить, что одно и то же тело может смачиваться одними жидкостями и не смачиваться другими. Например, стекло смачивается водой и не смачивается ртутью.

До сих пор мы рассматривали явления на границе двух тел: жидкости и твердого тела. Практически же мы всегда имеем взаимодействие трех тел: жидкости, твердого тела и газа. На рис. 1.38 приведены схемы капель, лежащих на твердой подкладке в газовой атмосфере. Кривая контакта этих трех тел в простейшем случае – окружность, обозначенная точками А и В.

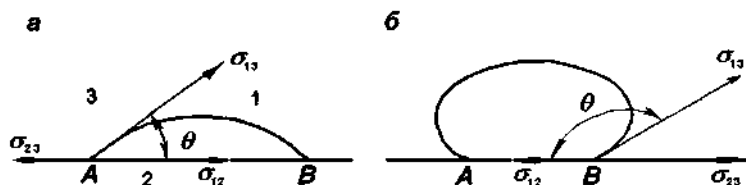


Рис. 1.38. Форма капли жидкости на горизонтальной поверхности при смачивании (а) и при несмачивании (б)

Приложим к точке A по касательным к поверхностям раздела соответствующих фаз силы поверхностного натяжения: σ_{12} – между жидкостью и подложкой, σ_{13} – между жидкостью и газом, σ_{23} – между газом и подложкой. Нетрудно видеть, что условие равновесия имеет вид $\sigma_{23} = \sigma_{12} + \sigma_{13} \cos \theta$, отсюда $\cos \theta = \frac{\sigma_{23} - \sigma_{12}}{\sigma_{13}}$.

С учетом смачивания и несмачивания рассмотренные выше явления могут приводить к поднятию или опусканию жидкости в капиллярах. Для иллюстрации рассмотрим капилляр в песчаной форме, для простоты считая его цилиндрическим. Обычно неокисленный металл не смачивает форму, т.е. образует в капилляре выпуклый мениск. На рис. 1.39 показан капилляр на расстоянии H от уровня металла в форме. Со стороны сплава в направлении капилляра действует давление $P_c = \rho g H$. Капиллярное давление $P_k = 2\sigma \frac{\cos \theta}{r}$ в случае несмачивания действует в противоположном направлении, т.е. препятствует проникновению металла в поры формы. Если металл окислен, то в зависимости от материала формы он может ее смачивать. При этом капиллярное давление направлено в ту же сторону, что и гидростатическое. Металл будет проникать в поры формы. Это приведет к образованию пригара – прочно сцепленного с поверхностью отливки пригарного слоя.

Для железоуглеродистых сплавов углы θ имеют следующие значения: с кварцевым песком – 103° , с магнезитом – $113-126^\circ$, с хромомагнези-

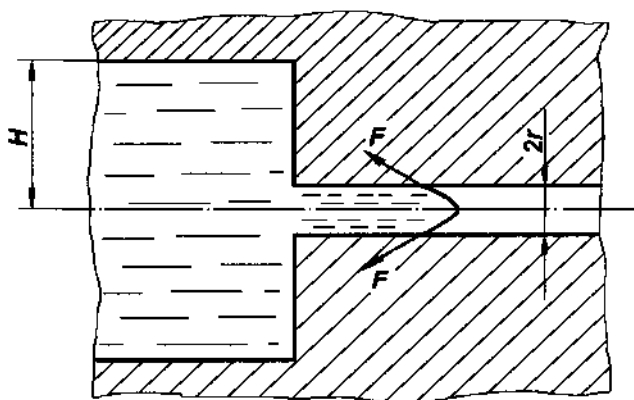


Рис. 1.39. Схема движения сплава в капилляре формы

том – 102–112°, с хромистым железняком – 81–88°, с оксидом алюминия – 141°. Видно, что в нейтральной атмосфере железоуглеродистые сплавы не смачивают основные формовочные материалы. Исключение составляет хромистый железняк. Повышение содержания кислорода в железе резко увеличивает смачивание. При повышении содержания кислорода с 0,031 до 0,192 % краевой угол θ падает со 105,5 до 52°. Добавка к сплаву поверхностно-активных веществ (например, серы к сталям и чугунам) вызывает уменьшение не только поверхностного натяжения, но и краевого угла. При этом эффект уменьшения θ превышает эффект снижения σ так, что капиллярное проникновение увеличивается.

Пористость формовочных смесей после уплотнения в форме составляет 15–45 %. Большая часть пор может быть отнесена к капиллярам. Капилляры в форме образуют сложную разветвленную пространственную систему неправильной геометрической формы. Поэтому строгое описание капиллярного движения сплава наталкивается на большие трудности. Из рассмотренной выше схемы следует, что в случае смачивания сплавом формы проникновение будет происходить при любой величине гидростатического давления, при этом тем интенсивней, чем больше эффективный диаметр капилляра $2r_z$. Под эффективным диаметром капилляра будем понимать диаметр такого цилиндрического канала, у которого высота капиллярного подъема сплава в данных условиях такая же, как в реальной форме. В случае несмачивания проникновение начнется только при $P_z > P_k$. Отсюда видно, что с ростом r , давление проникновения $P_{z.n}$ уменьшается.

Рассмотрим изотермическое проникновение сплава в капилляр в случае смачивания под действием только капиллярного давления. Как известно из гидравлики, скорость капиллярного поднятия может быть описана формулой

$$v_{cp} = \frac{dl}{dt} = \frac{P_k \cdot r^2}{8\eta l},$$

$$\text{где } P_k = 2\sigma \frac{\cos\theta}{r};$$

r – радиус капилляра.

$$\frac{dl}{dt} = \frac{2\sigma \cos\theta r^2}{8\eta l r}, \text{ или } l dl = \frac{2\sigma \cos\theta r}{8\eta} \cdot dt.$$

Интегрируя это уравнение при начальном условии $t=0, l=0$, находим формулу для вычисления зависимости глубины проникновения сплава в форму под действием капиллярного давления от времени:

$$l^2 = \frac{\sigma \cos \theta}{2\eta} \cdot t, \text{ или } l = k\sqrt{t},$$

$$\text{где } k = \sqrt{\sigma \frac{\cos \theta \cdot r}{2\eta}}.$$

Из формулы видно, что глубина изотермического проникновения сплава пропорциональна $\sqrt{t}$. Величина k для окисленной стали имеет порядок 0,1–0,3 мм/с^{1/2}. В реальных условиях проникновение сплава неизо-термическое. Установлено, что длина пропитанного слоя фактически определяется не гидравлическими условиями, а условиями прогрева слоя *формовочных* материалов. Для течения необходимо, чтобы смесь перед головой капиллярного потока успевала прогреться до температуры ликви-дуса сплава. Следует, однако, отметить, что в реальной форме чисто капил-лярной пропитки не происходит, так как гидростатическое давление сплава в форме даже для ее верхних участков имеет тот же порядок, что и капил-лярное давление.

3.4. Силы адгезии и когезии

Рассмотрим контакт двух фаз (жидкой и твердой или двух твердых). Поверхностные натяжения фаз обозначим σ_1 и σ_2 , а межфазную энергию фаз на границе их раздела – σ_{12} . Работу их изотермического обратимого разделения можно вычислить по формуле $W_A = \sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_{12}$. Эта работа на-зывается *адгезией*.

Поверхностное натяжение твердых фаз определить трудно. Поэтому используем данные о смачивании этих поверхностей жидкостями. Рас-сматривая адгезию жидкой 1 и твердой 2 фаз, найдем экспериментально краевой угол смачивания твердой фазы данной жидкостью. Он равен

$$\cos \theta = \frac{\sigma_2 - \sigma_{12}}{\sigma_1}. \text{ Поэтому } W_A = \sigma_1(1 + \cos \theta). \text{ Адгезия является характери-}$$

стикой прочности сцепления фаз. Она тем больше, чем выше поверхност-ное натяжение контактирующих фаз и меньше их межфазное натяжение.

Из полученного выше выражения следует, что, чем выше σ_1 и чем лучше жидкость смачивает твердое тело, тем прочнее их сцепление. Адгезия чистого жидкого железа к магнезии – 360 мДж/м². С увеличе-нием окисленности железа (θ уменьшается) адгезия резко возрастает (до 1235 мДж/м²). Величина адгезии определяет энергетические затра-ты на удаление приставшего к отливке пригарного слоя.

Работа по разрыву фазы с образованием двух новых поверхностей раздела, равная 2σ , называется *когезией*. Соотношение между адгезией воды, содержащейся в смеси, к поверхности модели или стержневого ящика и когезией смеси определяет прилипаемость смеси к модельной оснастке. Если смесь прилипает к поверхностям модели или ящика, то качественную форму или стержень приготовить невозможно. Для исключения прилипания необходимо, чтобы когезия превышала адгезию. Основные меры борьбы с прилипаемостью рассматриваются в курсе «Технология литейного производства».

3.5. Роль поверхностных явлений в пригарообразовании на отливках

Процесс затвердевания отливки связан с формированием ее поверхности, контактирующей с поверхностью формы. Форма представляет собой капиллярно-пористое тело, имеющее сложные по конфигурации капилляры, более или менее открытые для проникновения в них жидкого металла из полости формы. На проникающий в капилляры жидкий металл действуют следующие силы:

- гидростатическое давление столба жидкого металла в форме P_g ;
- капиллярное давление, приложенное к свободной поверхности жидкого сплава в капилляре P_k ;
- избыточное давление газов в порах смеси, образующееся при окислении, испарении и деструкции ее составляющих в процессе прогрева формы при заливке и охлаждении сплава $P_{г.ф.}$.

Схема приложения сил к расплаву в капилляре при смачивании формы металлом показана на рис. 1.40. Очевидно, что для проникновения сплава в форму необходимо выполнение неравенства $P_g + P_k > P_{г.ф.}$. Следует иметь в виду, что в целях борьбы с газовыми дефектами в отливках состав смеси подбирают так, чтобы она была наименее газотворна, т.е. добиваются минимального уровня давления $P_{г.ф.}$. Таким образом, смачивание жидким сплавом формы, как правило, ведет к его проникновению в межзеренные капилляры смеси. В случаях несмачивания сплавом формы $P_g > P_k + P_{г.ф.}$. Условия, исключающие его проникновение, выполнить проще, но также не всегда возможно.

Если указанные условия проникновения выполнены, то при изотермическом процессе расплав в капилляре под действием перепада давлений будет двигаться как угодно долго. При этом длина заполненного капилляра будет увеличиваться, как было показано выше, пропорционально $\sqrt{t}$.

В условиях реальной песчаной формы проникновение сплава в капилляры происходит в неизотермических условиях. В песчаной форме после заливки сплава температура распределена неравномерно, по мере удаления от границы с отливкой она быстро убывает. Поэтому голова потока расплава в капилляре все время набегает на холодные, непрогретые поверхности зерен песка, что приводит к затвердеванию прожилок расплава и прекращению его проникновения. Обычно глубина проникновения расплава ограничивается одним или несколькими слоями зерен смеси. Однако в некоторых случаях, особенно в тонких центральных, со всех сторон омываемых сплавом стержнях, металл может заполнить капилляры на всю толщину стержня. В этих случаях происходит, как говорят, сквозная металлизация стержня. Такой стержень практически невозможно выбить из отливки.

В результате поверхностного проникновения металла в поры смеси на поверхности отливки образуется и удерживается после выбивки более или менее толстый слой пропитанной металлом формовочной смеси, иногда очень трудноудаляемый. Этот поверхностный дефект отливок называют *пригаром*. Пригар, образуемый по описанному механизму, называется *механическим*.

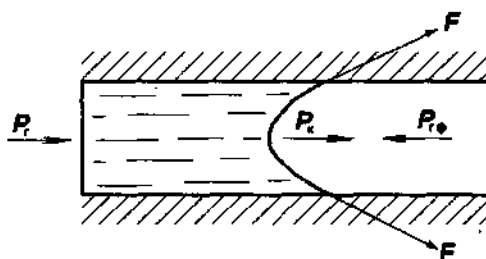
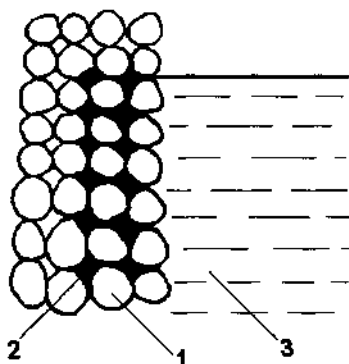


Рис. 1.40. Распределение давлений при смачивании сплавом формы

Однако на практике чисто механический пригар образуется редко. В условиях окислительной атмосферы формы поверхность металла часто покрыта пленками оксидов. Например, при литье железоуглеродистых сплавов важную роль играют оксиды железа и марганца FeO и MnO . Они вступают во взаимодействие с кремнеземом песка с образованием легкоплавких соединений типа фаялита ($2\text{FeO} \cdot \text{SiO}_2$), родонита ($\text{MnO} \cdot \text{SiO}_2$), тефрита ($2\text{MnO} \cdot \text{SiO}_2$) и др. С возникновением оксидных или силикатных легкоплавких фаз проникновение сплава в поры смеси существенно облегчается. Оксиды хорошо смачивают смесь, и сами хорошо смачиваются металлом. Расплав идет за ними в капилляр как нитка за иголкой. Оксидные рас-

плавцы легко пропитывают поверхностный слой смеси, химически разрушая зерна песка. Иногда вместо зерен песка в пригарном слое обнаруживают монолитную массу, состоящую из указанных выше соединений. При этом образуется наиболее тяжелый вид пригара – *химический*. Из изложенного следует, что необходимой стадией образования химического пригара являются процессы, связанные с механическим пригаром. Схема образования пригарного слоя показана на рис. 1.41. К описанным выше процессам следует добавить процессы плавления наиболее легкоплавких составляющих смеси (оксиды щелочных металлов, зерна полевого шпата, алюмосиликаты глины и т.п.) и их последующего спекания. Эти процессы характерны для так называемого *термического пригара*.

Рис. 1.41. Строение пригарного слоя:
1 – зерна песка; 2 – слой пригара;
3 – расплав



Все указанные виды пригара, как правило, сосуществуют. Пригарный слой представляет собой самостоятельную фазу, имеющую свою структуру. Этот слой удерживается на поверхности отливки не только за счет действия проникших в смесь прожилков металла, но и благодаря адгезии, чему способствуют спекание слоя и структурные превращения в нем. Для уменьшения адгезии необходимо повысить межфазное натяжение на границе поверхности отливки и пригарного слоя. В тех случаях, когда межфазное натяжение на этой границе мало, что имеет место при близких структурах металла и слоя, пригарный слой прочно удерживается на поверхности отливки силами адгезии.

В качестве примера можно привести неожиданный результат, полученный при освоении жидкостекольных смесей на УЗТМ в начале 1950-х гг. Данные смеси, связующим в которых является силикат натрия или калия, содержат большое количество легкоплавких оксидов щелочных металлов и поэтому отличаются большой пригораемостью. К удивлению технологов, смеси относительно легко были внедрены на стальном литье. При этом образовывался достаточно толстый слой пригара, который легко отскакивал от поверхности отливок при их очистке. В то же время на чу-

гунном литье, несмотря на значительно меньшую, чем при стальном литье, температуру заливки, при применении жидкостекольных смесей образуется трудноудаляемый пригарный слой. Минералогический и рентгеноструктурный анализ пригарного слоя показали, что при температурах, характерных для литья чугуна, он имеет кристаллическую структуру, близкую к структуре металла. Это приводит к снижению межфазного натяжения на границе отливки и пригарного слоя и, как следствие, к увеличению адгезии. При литье стали пригарный слой имеет вид аморфно-стекловидной массы, что приводит к увеличению межфазного натяжения и снижению адгезии.

Таким образом, поверхностные явления играют важную роль в пригарообразовании. Естественно, такой сложный процесс не исчерпывается только поверхностными явлениями. Комплексное рассмотрение пригарообразования – предмет технологических разделов спецкурса. С точки же зрения поверхностных явлений борьба с пригаром должна быть направлена на уменьшение как смачиваемости металлом материала формы, так и адгезии слоя к сплаву. Это может быть достигнуто благодаря подбору формовочных материалов, противопригарных покрытий, раскислению металла, предотвращению его окисления в форме, легированию сплава и т.п.

Рассмотренные свойства жидких металлов и сплавов не охватывают всех их важнейших технологических характеристик. Мы не рассматривали механические свойства сплавов в жидком и двухфазном состояниях, теплоемкость жидких сплавов, их теплопроводность и другие свойства. Эти свойства металлов и сплавов будут рассмотрены в соответствующих разделах курса.

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое ближний и дальний порядок?
2. Какова основная причина плавления твердых тел?
3. Каковы особенности теплового движения твердых, жидких и газообразных тел?
4. В чем причина объемного расширения тел в твердом состоянии?
5. Расскажите об объемных изменениях при плавлении тел.
6. Что такое радиальная функция распределения и корреляционная функция?
7. Каков смысл и вид радиальной функции распределения и корреляционной функции для газов, жидкостей и твердых тел?
8. Что такое кластер?
9. Какова зависимость вязкости металлов и сплавов от их состава, температуры и давления?

10. Что такое реология?
11. Каковы модель и поведение H -тела и N -тела?
12. Каковы модель и поведение B -тела?
13. Каковы модель и поведение сплава в интервале ликвидус – солидус?
14. Что такое адгезия и когезия?
15. Поясните механизмы образования пригара.
16. Каковы меры борьбы с пригаром?
17. Напишите формулы для вычисления величины капиллярного давления.
18. Рассчитайте температуру плавления алюминиевого шарика диаметром 0,0001 мм при следующих параметрах: равновесная температура плавления при плоской границе фаз $T_{ровн}=660\text{ }^{\circ}\text{C}$; поверхностное натяжение $\sigma_{т-ж}=860\cdot 10^{-3}\text{ Дж/м}^2$; теплота плавления $L=418\text{ кДж/кг}$; плотность $\rho=2710\text{ кг/м}^3$.
19. Найдите координационное число для компактной гексагональной решетки.
20. Найдите радиусы четырех первых координационных сфер для компактной гексагональной решетки и постройте для нее график распределения числа атомов по координационным сферам.
21. Определите величину относительной деформации H -тела при сдвиге, если $\tau=300\text{ МПа}$, $E=70\text{ ГПа}$, $\mu=0,31$.
22. Выведите формулу Пуазейля для вычисления средней скорости и расхода ньютоновской жидкости в цилиндрическом канале радиусом R при постоянном перепаде давлений ΔP . Во сколько раз возрастет расход, если радиус канала увеличить в 2 раза?
23. Постройте график изменения деформации B -тела во времени при следующих исходных данных: $\tau=100\text{ МПа}=\text{const}$, $\tau_s=60\text{ МПа}$, $\eta=10\text{ Н}\cdot\text{с/м}^2$, $G=1\text{ ГПа}$. Какой будет деформация через 30 с?
24. Вычислите вязкость алюминиевого сплава, содержащего в 1 см^3 2000 частиц радиусом 0,1 см, если вязкость чистого сплава $\eta_0=10^2\text{ Н}\cdot\text{с/м}^2$.
25. Постройте график изменения деформации тела Кельвина при $\tau=300\text{ МПа}$, $G=1\text{ ГПа}$, $\eta=10\text{ Н}\cdot\text{с/м}^2$. Какой будет деформация через 30 с? По какой кривой идет уменьшение деформации при разгрузке?

РАЗДЕЛ 2. ТЕОРИЯ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ ОТЛИВОК. ПРОЦЕССЫ ТЕПЛООБМЕНА В ЛИТЕЙНОЙ ФОРМЕ

Среди многочисленных взаимосвязанных процессов при формировании отливок центральное место занимают тепловые процессы. Важнейшим термодинамическим параметром, определяющим состояние любой системы, является температура.

При формировании отливки имеет место сложный теплообмен, реализуемый всеми известными механизмами теплопередачи: теплопроводностью, конвекцией и тепловым излучением. При этом закономерности изменения температуры сплава и материала формы во многом определяют качество литых заготовок. Условия теплообмена между отливкой и формой обуславливают закономерности основного литейного процесса – затвердевания отливок.

Глава 1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ

1.1. Основные понятия теории теплопередачи

Теплопередача представляет собой необратимый самопроизвольный процесс переноса теплоты в пространстве. При наличии в некоторой среде неоднородного распределения температуры T в ней неизбежно происходит процесс теплопередачи. В соответствии со вторым началом термодинамики перенос теплоты осуществляется в направлении уменьшения температуры, т.е. из областей с большей температурой в области с меньшей температурой. Для характеристики этого процесса используют понятие *плотности теплового потока* $\vec{q}$, представляющего собой вектор, направление которого совпадает с направлением распространения тепла и который численно равен количеству тепловой энергии, передаваемой через единицу площади в единицу времени. Плотность теплового потока связана с характеристиками физического состояния среды.

Распределение температур в пространстве, занятом телом или системой тел, представляет собой скалярное поле. Оно характеризуется скалярной функцией $T=T(x, y, z, t)$, выражающей зависимость температуры от координат и времени. Функция $T(x, y, z, t)$ описывает нестационарное температурное поле, в котором температура в каждой точке с заданными координатами изменяется во времени. Поле, описываемое функцией $T(x, y, z)$, т.е. когда температура является функцией только

координат и в каждой точке со временем не изменяется ($\frac{\partial T}{\partial t} = 0$), называется *стационарным*. Примером нестационарного поля является поле нагревающейся в печи стальной заготовки или охлаждающейся в литейной форме отливки. Поле в прогретой печи, когда температура каждой ее стенки не изменяется во времени, будет стационарным.

Поле, в котором температура является функцией трех координат, называется *пространственным* или *трехмерным*. Если вдоль одной из координат, например z , температура остается постоянной ($\frac{\partial T}{\partial z} = 0$), то темпе-

ратурное поле будет двумерным. Примером двумерного поля является температурное поле длинной плоской отливки в песчаной форме. Так как длина отливки l , расположенная вдоль оси z , значительно больше ее ширины и толщины, расположенных вдоль осей x и y , то перепадом температур вдоль оси z можно пренебречь по сравнению с перепадами вдоль осей x и y . При этом распределение температур в каждом поперечном сечении отливки вдоль оси z будет практически одинаковым.

Если температура остается постоянной вдоль двух осей, например z и y ($\frac{\partial T}{\partial z} = 0$ и $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$), и изменяется только вдоль одной оси (x), то поле называется *одномерным*. Примером одномерного поля будет температурное поле в плоской отливке, толщина которой значительно меньше длины и ширины.

Число пространственных переменных, определяющих температурное поле, иногда можно уменьшить путем изменения системы координат. Например, при симметричном охлаждении (или нагреве) неограниченного по длине круглого цилиндра (поперечный разрез цилиндра показан на рис. 2.1) в декартовой системе координат температурное поле будет двумерным, т.е. $T = T(x, y, t)$. При переходе к полярной системе координат температура будет функцией координат r и φ . В силу симметричных условий охлаждения (или нагрева) температура не зависит от φ (вдоль любой окружности температура не меняется, т.е. $\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$). Поэтому при переходе

к полярным координатам двумерное температурное поле $T(x, y, t)$ в указанных условиях переходит в одномерное $T(r, t)$.

Аналогично при переходе от декартовых координат к сферическим температурное поле симметрично охлаждаемого (нагреваемого) шара переходит от трехмерного $T(x, y, z)$ к одномерному $T(r)$.

В теле, имеющем температуру $T(x, y, z)$, можно выделить совокупность изометрических поверхностей, во всех точках которых температура одинакова. Изотермическую поверхность в общей теории поля называют *поверхностью уровня*. Уравнение поверхностей уровня имеет вид

$$T(x, y, z, t) = C, \text{ или } T = C, \quad (2.1)$$

где $C = \text{const}$.

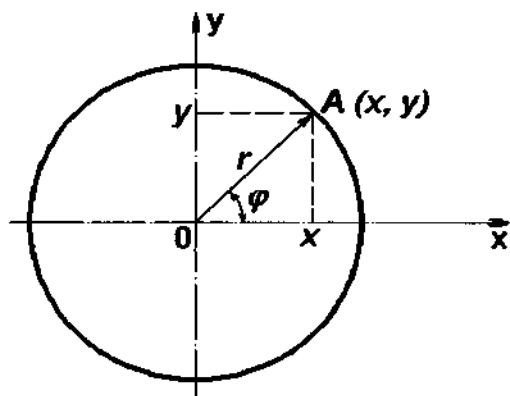


Рис. 2.1. Полярная система координат

Придавая константе C разные значения и подставляя ее в уравнение (2.1), получаем уравнения семейства поверхностей уровня, соответствующих разным значениям температуры. Пусть, например, температурное поле задано функцией $T = 100 + 2(x^2 + y^2 + z^2)$. Уравнение поверхности уровня, отвечающей температуре C , для данного случая имеет вид

$$C = 100 + 2(x^2 + y^2 + z^2), \text{ или } x^2 + y^2 + z^2 = \frac{C - 100}{2}.$$

Видно, что поверхности уровня представляют собой совокупность концентрических сфер с радиусом $r = \sqrt{\frac{C - 100}{2}}$. Например, при $C = 300^\circ\text{C}$

$r = \sqrt{\frac{300 - 100}{2}} = 10$. Если двигаться по сфере с радиусом 10, то температура при переходе от точки к точке останется неизменной (300°C).

Поверхности уровня обладают следующими свойствами:

- две изотермические поверхности, имеющие разные температуры, никогда не пересекаются, так как в одной и той же точке тела одновременно не может быть двух различных температур;
- изотермические поверхности или замыкаются внутри тела, или заканчиваются на его поверхности;
- теплота не распространяется вдоль изотермической поверхности, так как теплопередача имеет место лишь при наличии перепада температур;
- теплота передается по направлению от одной изотермической поверхности к другой, имеющей более низкую температуру.

Пересечение изотермических поверхностей плоскостью дает на этой плоскости семейство изотерм, т.е. линий, соответствующих одинаковым температурам.

Двумерное поле ($\frac{\partial T}{\partial z} = 0$) очень удобно изображать графически с помощью семейства изотермических линий, полученных при сечении изотермических поверхностей плоскостью, перпендикулярной оси z , с отметкой на них соответствующих значений температуры. На рис. 2.2 показан

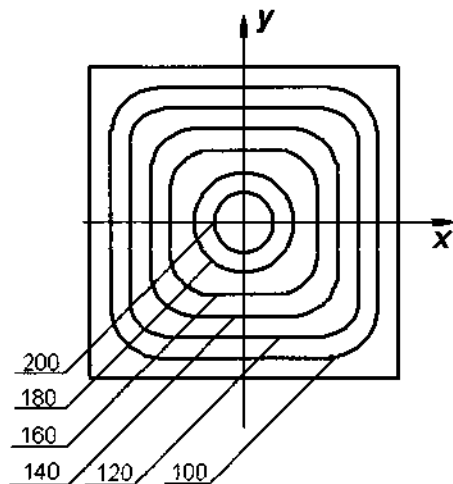


Рис. 2.2. Характер изотермических линий в отливке квадратного сечения, проведенных через 20° (от 200 до 100°C)

пример совокупности изотерм в сечении симметрично охлаждаемой длинной отливки квадратного сечения. Равенство $T(x, y, z) = C$ определяет на плоскости (x, y) некоторую кривую $y = \varphi(x, z, t)$, называемую *линией уровня*. По характеру распределений линий уровня по третьей координате, например z , различают плоскопараллельное, осесимметричное, цилиндрическое и сферическое поле.

Если при сдвиге вдоль оси z температурное поле переходит само в себя, то его называют *плоскопараллельным*. Например, в бесконечно длинном стержне постоянного по длине сечения (цилиндр, квадратный или прямоугольный брус и т.п.) во всех сечениях по длине линии уровня одинаковы. Изотермическими поверхностями в этом случае будут цилиндрические поверхности.

Поле T называют *осесимметричным*, если оно переходит в себя при повороте пространства на определенный угол вокруг некоторой фиксированной прямой – оси симметрии поля. Оно задается в цилиндрической системе координат уравнением $T = T(r, z, t)$, т.е. функцией, не зависящей от угловой координаты φ . В плоскости (r, z) линии уровня имеют уравнение $\varphi(r, z) = C$ относительно оси симметрии. Например, в симметрично охлаждаемом шаре изотермической линией будет окружность, а изотермической поверхностью – сфера, полученная вращением этой окружности относительно оси.

Если температурное поле T задается функцией, зависящей лишь от одной координаты r (в цилиндрической системе координат), т.е. $T = T(r)$, то поле называется *цилиндрическим*. Изотермические поверхности в этом случае представляют собой круглые цилиндры. Аналогично если функция T (в сферической системе координат) зависит лишь от переменной r , то температурное поле будет *сферическим*. При этом изотермические поверхности – семейство концентрических сфер.

Важнейшей характеристикой температурного поля, как и любого скалярного поля, является *градиент*. Рассмотрим две бесконечно близкие изотермические поверхности (рис. 2.3), соответствующие температурам T и $T + dT$. При перемещении из точки A на поверхности с температурой T в направлении к поверхности с температурой $(T + dT)$ интенсивность изменения температуры вдоль разных направлений неодинакова. При перемещении по касательной $\vec{\tau}$ температура не изменяется, так как вдоль изотермической поверхности температура постоянна. Скорость изменения температуры вдоль направления $\vec{l}$ равна частной производной по этому направлению

$$\frac{\partial T}{\partial l} = \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial T}{\partial y} \cdot \cos \beta + \frac{\partial T}{\partial z} \cdot \cos \gamma,$$

где α , β и γ — углы, образованные направлением $\vec{l}$ с осями координат x , y и z .

Наибольшая скорость изменения температуры имеет место при перемещении вдоль нормали $\vec{n}$ к изотермической поверхности в точке A .

При этом $\frac{\partial T}{\partial n} = \sqrt{\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2}$. Вектор, направленный по

нормали к изотермической поверхности в данной точке температурного поля в сторону увеличения температуры и равный по модулю максимальной интенсивности изменения температуры $\frac{\partial T}{\partial n}$, называется *градиентом*

температуры $\text{grad } T$.

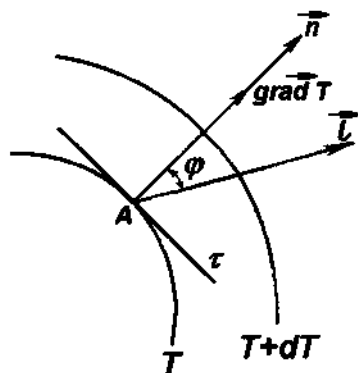


Рис. 2.3. Схема к пояснению смысла градиента

Таким образом, $|\text{grad } T| = \frac{\partial T}{\partial n} = \sqrt{\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2}$ и

$$\text{grad } T = \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \cdot \vec{k},$$

где $\frac{\partial T}{\partial x}$, $\frac{\partial T}{\partial y}$ и $\frac{\partial T}{\partial z}$ – соответствующие частные производные, вычисленные в точке A .

Температурный градиент показывает, насколько интенсивно меняется температура внутри тела. Он является важной величиной, определяющей многие физические явления (возникновение напряжений и трещин в отливках при их неравномерном охлаждении, направленность затвердевания отливок и формирование в них объемных усадочных дефектов и т.п.).

Необходимым условием теплопередачи является неравенство нулю градиента температур. Действительно, если градиент температур в теле равен нулю, то температура в нем распределена равномерно и тело находится в тепловом равновесии.

Уточним сформулированное выше понятие вектора плотности теплового потока.

Тепловой поток в отличие от температуры является векторной величиной, так как он имеет определенное направление – от точек с более высокой температурой к менее нагретым, т.е. это вектор, направленный в сторону уменьшения температур. Под вектором плотности теплового потока $\vec{q}$ в точке A температурного поля понимают вектор, направление которого совпадает с направлением переноса теплоты, а абсолютная величина выражает интенсивность переноса теплоты, измеряемую количеством теплоты $\frac{dQ}{dt}$, проходящей в единицу времени через единицу площади поверхности dS , перпендикулярной направлению потока в рассматриваемой

точке $|\vec{q}| = \frac{1}{dS} \cdot \frac{dQ}{dt}$.

1.2. Механизмы теплопередачи

Процессы переноса тепла могут осуществляться за счет разных механизмов. Если теплоперенос происходит за счет передачи тепловых колебаний микрочастиц (молекул, атомов, ионов и т. п.) или хаотического теплового движения, то соответствующий ему механизм называется *теплопроводностью* или *кондукцией*. При этом не происходит массопередачи, т.е. направленного перемещения вещества. Механизм теплопроводности можно пояснить с помощью следующей линейной модели (рис. 2.4).

Микрочастицы, изображенные на рис. 2.4, связаны друг с другом силами межмолекулярного взаимодействия. Как известно, частицы совершают ангармонические тепловые колебания около своих положений рав-

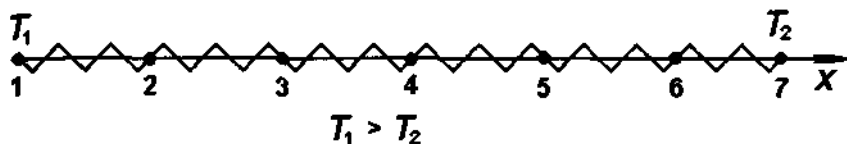


Рис. 2.4. Схема линейного кристалла

новесия. Интенсивность колебаний зависит от температуры. Если в точке 1 повысить температуру, то интенсивность ее колебаний возрастет. Это повышение интенсивности благодаря связи будет последовательно передаваться от точки к точке, т.е. волна повышения интенсивности колебаний и соответствующего ей повышения температуры будет распространяться вдоль оси x . В реальном кристалле картина колебаний более сложная, но суть процесса аналогична рассмотренному.

В газах, как известно из молекулярной физики, теплопроводность осуществляется путем передачи кинетической энергии атомов, пропорциональной температуре, другим атомам при их соударениях в пределах длины свободного пробега.

В жидкостях основным механизмом теплопроводности является описанный выше механизм для твердых тел.

В электрических проводниках, кроме отмеченных выше механизмов, имеет место теплопередача за счет хаотического движения носителей электрических зарядов. Например, в металлических телах существенный вклад в теплопроводность вносит электронный теплоперенос за счет хаотического движения свободных электронов.

Из опыта известно, что передача теплоты путем теплопроводности происходит по нормали к изотермической поверхности в сторону понижения температуры. Следовательно, вектор плотности теплового потока направлен по нормали к изотермической поверхности от мест с большей температурой к местам с меньшей температурой.

В первой половине XIX в. французский математик Ж. Фурье высказал гипотезу о пропорциональности плотности теплового потока при теплопроводности градиенту температур, положенную в основу закона теплопроводности Фурье. В векторном виде закон Фурье имеет вид

$$\vec{q} = -\lambda \cdot \vec{\text{grad}} T, \quad (2.2)$$

где λ — коэффициент пропорциональности, который называется теплопроводностью, являющийся физической константой, характеризующей те-

плопроводящие свойства материала данного тела. Размерность коэффициента теплопроводности $[\lambda] - \text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$.

Численное значение λ определяет количество теплоты, проходящее через единицу площади изотермической поверхности в единицу времени при градиенте температуры, равном единице. Коэффициент теплопроводности зависит от природы вещества, его влажности, плотности, давления, температуры и других факторов. Для выполнения инженерных расчетов λ определяют экспериментально или на основании справочных таблиц.

В процессах с незначительными интервалами изменения температур можно с достаточной точностью пренебречь зависимостью от температуры. Однако в литейных и металлургических процессах, где температуры изменяются в значительных пределах (сотни и тысячи градусов), как правило, необходимо учитывать изменение теплопроводности с изменением температуры. Для большинства тел зависимость $\lambda(T)$ может быть аппроксимирована линейной зависимостью

$$\lambda = \lambda_0(1 \pm b(T - T_0)), \quad (2.3)$$

где λ_0 – теплопроводность при $T = T_0$;

b – температурный коэффициент изменения теплопроводности.

Знак «+» в выражении (2.3) справедлив для газов, формовочных и стержневых смесей и огнеупоров. Знак «–» справедлив для металлов и сплавов.

Теплопроводность в чистом виде имеет место только в твердых телах. В жидкостях и газах наряду с теплопроводностью теплоперенос может осуществляться путем передачи тепловой энергии вместе с переносом вещества. Такой механизм теплопередачи называется *конвекцией*.

Для иллюстрации рассмотрим движение жидкости или газа со скоростью v в цилиндрической трубе с площадью сечения S (рис. 2.5). Характер распределения температур среды по длине трубы показан на рис. 2.5, а.

Количество тепла, поступившего в объем dx , выделенный на расстоянии x от начала трубы, за время dt , равно $c\rho v \cdot dt \cdot S \cdot T$, где c и ρ – теплоемкость и плотность среды в сечении с координатой x . Так как температуру в сечении с координатой $(x + dx)$ можно выразить следующим равенством: $T(x + dx) = T(x) + \frac{\partial T}{\partial x} \cdot dx$, то за время dt выделенный объем

потеряет количество тепла, равное $c\rho v \cdot S(T + \frac{\partial T}{\partial x} \cdot dx)dt$. В результате за

счет переноса тепла изменение теплосодержания данного объема пространства за время dt будет равно

$$dQ = c\rho v \cdot S T dt - c\rho S \left(T + \frac{\partial T}{\partial x} \cdot dx \right) dt = -c\rho v S dx \frac{\partial T}{\partial x} dt, \text{ или}$$

$$q = -c\rho v \frac{\partial T}{\partial x} \cdot dx. \quad (2.4)$$

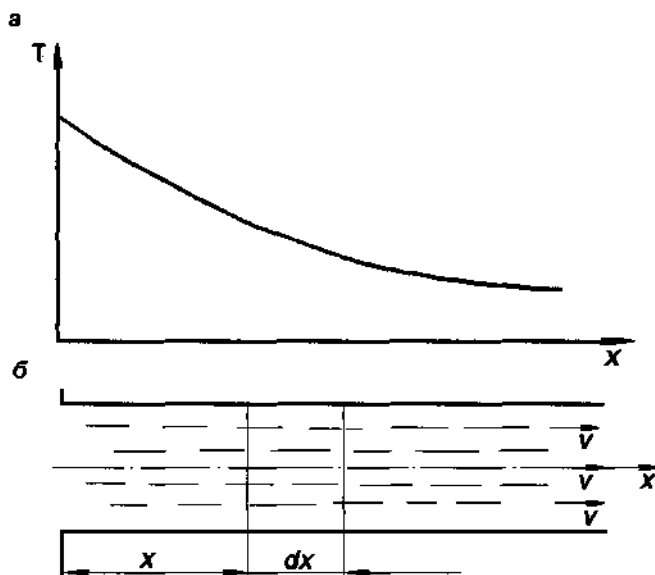


Рис. 2.5. Характер изменения температуры (а) по длине потока жидкости в цилиндрической трубе (б)

Как видно из выражения (2.4), тепловой поток в данном случае зависит от градиента температур и от скорости среды. Рассмотренный случай является примером *вынужденной конвекции*, которая осуществляется при движении среды, вызванном приложением внешних перепадов давлений.

Кроме вынужденной конвекции различают *естественную конвекцию*, при которой движение среды вызывается перепадом плотности среды из-за неравномерного распределения в пространстве ее температур. На рис. 2.6 показана нагретая до температуры T_1 вертикальная пластина, помещенная в неограниченную среду с температурой $T_2 < T_1$. Так как темпе-

ратура T_3 в точке 1 около поверхности плиты выше температуры среды T_4 в более удаленной точке 2, плотность среды в точке 2 больше, чем в точке 1. Поскольку давление столба жидкости пропорционально плотности, то давление в точке 2 окажется больше давления в точке 1, что вызовет движение среды (рис.2.6, б). Очевидно, что интенсивность движения, а, следовательно, и теплопередачи будет зависеть от перепада плотностей среды, связанного с перепадом температур.

Вследствие движения среды наиболее нагретые частицы с ее поверхности будут выноситься в объем среды, а холодные частицы среды – передаваться к поверхности плиты, охлаждая ее. Таким образом, будет происходить перенос тепла от плиты к среде.

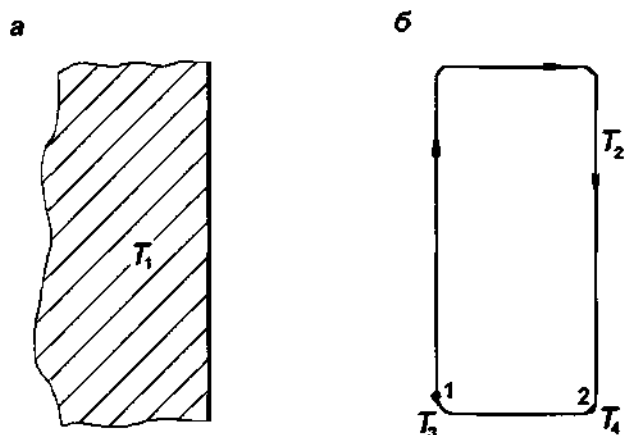


Рис. 2.6. Вертикальная плита (а) и характер движения среды (б), в которую она помещена

Процесс конвективного теплопереноса очень сложен и непосредственно связан с гидродинамическими закономерностями движения среды. В инженерных расчетах для определения плотности теплового потока при конвективном теплопереносе применяют формулу Ньютона

$$|\vec{q}| = \alpha(T_1 - T_2), \quad (2.5)$$

где α – коэффициент теплообмена двух тел с температурами T_1 и T_2 ($T_1 > T_2$), разделенных средой.

Коэффициент теплообмена численно равен количеству тепла, переданному через единицу площади в единицу времени и отнесенному к одному градусу перепада температур между телами. Размерность $[\alpha] = \text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$.

В случае если теплопередача осуществляется от движущейся среды к твердому телу или от твердого тела к среде, выражение для $\bar{q}$ имеет вид

$$\bar{q} = \pm \alpha (\bar{T}_{cp} - T_n), \quad (2.6)$$

где α – коэффициент теплообмена, называемый иногда для данного случая коэффициентом теплоотдачи;

$\bar{T}_{cp}$ – среднеинтегральная температура по сечению потока среды;

T_n – температура поверхности тела.

Если $\bar{T}_{cp} > T_n$, применяется знак «+»; если $\bar{T}_{cp} < T_n$ – знак «-».

В общем случае количество переданного тепла dQ можно определить по формуле

$$dQ = \pm \alpha S \cdot \Delta T \cdot dt, \quad (2.7)$$

где $\Delta T = \bar{T}_{cp} - T_n$, или $\Delta T = T_1 - T_2$.

Видимая простота выражений (2.5)–(2.7) затрудняется сложным и чаще всего определяемым лишь экспериментально видом зависимости для вычисления α .

Интенсивность теплопередачи в условиях конвективного теплообмена характеризуется значением безразмерного комплекса – критерия Нуссельта $Nu = \alpha R / \lambda$, где λ – коэффициент теплопроводности среды; R – характерный размер (при движении жидкости в цилиндрической трубе, например, R – радиус трубы).

В теории конвективного теплообмена для определения интенсивности теплообмена устанавливают критериальные зависимости вида:

$$Nu = f(Re); \quad (2.8)$$

$$Nu = \varphi(Pe); \quad (2.9)$$

$$Nu = \psi(Gr, Pr). \quad (2.10)$$

Здесь $Re = vR/\nu$ – критерий Рейнольдса; $Pr = \nu/\alpha$ – критерий Прандтля; $Pe = Re \cdot Pr = vR/\alpha$ – критерий Пекле;

$Gr = gR^3 \cdot \Delta T \cdot \beta / \nu^2$ – критерий Грасгофа,

где ν – кинематический коэффициент вязкости среды;

$\alpha = \lambda / (c\rho)$ – коэффициент температуропроводности среды;

$\beta = 1/313$ – коэффициент температурного объемного расширения среды;

ΔT – перепад температур в среде при естественной конвекции.

Формулы вида (2.8) применяются при $Pr \geq 1$, вида (2.9) – при $Pr < 1$ для условий вынужденной конвекции. Зависимость вида (2.10) используют при свободной конвекции. Конкретные зависимости (2.8) и (2.9) для разных условий теплообмена рассматриваются в курсе металлургической теплотехники.

Для иллюстрации приведем метод расчета коэффициента α для случая, показанного на рис. 2.6, т.е. для естественной конвекции около вертикальной плиты.

На основании обобщения экспериментальных данных для этого случая установлен следующий вид зависимости (2.10):

$$Nu = c(Gr \cdot Pr)^n, \quad (2.11)$$

где коэффициенты c и n определяются по табл. 2.1 в зависимости от величины произведения критериев $Pr \cdot Gr$ [10, 12].

Так как, $Nu = \alpha R / \lambda$, где $R = H$ (H – высота пластины), то

$$\alpha H / \lambda = c(Pr \cdot Gr)^n, \text{ или } \alpha_{\text{конв}} = c\lambda(Pr \cdot Gr)^n / H \quad (2.12)$$

Для воздуха $Pr = 0,699$. При вычислении Gr перепад температур ΔT равен разности температур поверхности пластины и окружающей среды ($\Delta T = T_1 - T_2$).

Таблица 2.1
Зависимость коэффициентов c и n от величины $Pr \cdot Gr$ [10, 12]

$Pr \cdot Gr$	c	n
$10^{-4} - 10^{-3}$	0,500	0
$10^{-3} - 5 \cdot 10^2$	1,180	1/8
$5 \cdot 10^2 - 2 \cdot 10^7$	0,540	1/4
$2 \cdot 10^7 - 10^{13}$	0,135	1/3

Из табл. 2.1 видно, что Nu практически остается постоянным и равным 0,5 при $Pr \cdot Gr < 10^{-3}$, т.е. теплообмен осуществляется путем теплопроводности ($\alpha = 0,5 \lambda / H$).

Формулы (2.11) и (2.12) можно использовать в расчетах интенсивности охлаждения форм и отливок на воздухе.

Третьим классическим механизмом теплопередачи является *тепловое излучение*.

Известно, что все тела, имеющие температуру выше абсолютного нуля, излучают энергию в результате квантовых переходов атомов и молекул из устойчивых состояний с большей энергией в устойчивые состояния с меньшей энергией. При этом происходит испускание квантов энергии $E=hu$. Электромагнитная волна распространяется со скоростью света и характеризуется частотой излучения ν .

Плотность потока энергии интегрального полусферического излучения (рис. 2.7) от каждой точки тела определяется в соответствии с законом Стефана–Больцмана по формуле

$$|\vec{q}| = \varepsilon \cdot \sigma_0 T^4, \quad (2.13)$$

где σ_0 – постоянная Стефана–Больцмана, $\sigma_0=5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м²·К⁴);

T – абсолютная температура тела, К;

ε – степень черноты тела, представляющая собой отношение излучательной способности тела к излучательной способности абсолютно черного тела.

Абсолютно черное тело – тело, которое поглощает весь падающий на него световой поток. Его излучательная способность максимальная, поэтому у реальных тел $\varepsilon < 1$.

На практике формулу (2.13) применяют в другом виде

$$|\vec{q}| = \varepsilon \cdot C_0 \left(\frac{T}{100} \right)^4,$$

где C_0 – константа излучения абсолютно черного тела, $C_0=5,76$ Вт/(м²·К⁴).

Для определения теплового потока от той или иной поверхности в системе взаимодействующих тел необходимо суммировать тепловые потоки, излучаемые и поглощаемые всеми точками данной поверхности. В том случае, когда имеет место излучение нагретого до температуры T_1 тела в окружающее пространство с температурой T_2 , плотность теплового потока с поверхности тела может быть вычислена по формуле

$$|\vec{q}| = \varepsilon \cdot C_0 \cdot 10^{-8} (T_1^4 - T_2^4). \quad (2.14)$$

Это уравнение можно преобразовать в выражение вида (2.5).

$$|\bar{q}| = \varepsilon \cdot C_0 \cdot 10^{-8} (T_1^2 - T_2^2)(T_1^2 + T_2^2) = \varepsilon C_0 \cdot 10^{-8} (T_1^2 + T_2^2)(T_1 + T_2)(T_1 - T_2) = \alpha_{\text{луч}} (T_1 - T_2); \quad (2.15)$$

$$\alpha_{\text{луч}} = \varepsilon \cdot C_0 \cdot 10^{-8} (T_1^2 + T_2^2)(T_1 + T_2), \quad (2.16)$$

где $\alpha_{\text{луч}}$ – коэффициент теплоотдачи при теплообмене излучением.

Так как при этом происходит и конвективная теплоотдача, то суммарный коэффициент теплоотдачи равен сумме конвективного и излучательного коэффициентов, т.е.

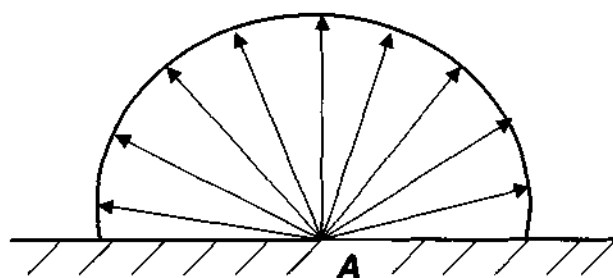


Рис. 2.7. Излучение в сферическом полупространстве от точки A нагретого тела

$$\alpha_{\Sigma} = \alpha_{\text{конв}} + \alpha_{\text{луч}}. \quad (2.17)$$

Поскольку при формировании отливок теплообмен излучением не имеет столь важного значения, как при работе металлургических печей, в данном курсе он не рассматривается. Подробное изложение теплопередачи излучением осуществляется в курсе «Металлургическая теплотехника».

В литейных процессах рассмотренные механизмы теплопередачи, как правило, не встречаются в чистом виде. Теплопроводность как единственно возможный механизм теплопередачи имеет место лишь в сплошном твердом теле, например в затвердевшей отливке. В капиллярно-пористом теле, к примеру, в формовочной смеси, действуют все три механизма теп-

допередачи. При этом роль конвекции газов в межзеренном пространстве и излучении в порах повышается с ростом температуры. В жидких сплавах имеет место как теплопроводность, так и конвекция.

В силу того что определяющую роль в процессах формирования отливок играет теплопроводность, влияние других механизмов в инженерных расчетах учитывают через эффективные коэффициенты теплопроводности, суммирующие эффекты от всех видов теплопередачи.

1.3. Основы теории теплопроводности

Различают прямые и обратные задачи теплопроводности. Сущность прямых задач составляет нахождение по заданным исходным данным распределения температуры в рассматриваемой системе в виде функции $T=T(x, y, z, t)$. В обратной постановке ставится задача определения по заданной функции $T=T(x, y, z, t)$ теплофизических свойств участвующих в теплообмене тел.

Основным методом теории теплопроводности является математическое моделирование, сводящееся к описанию задачи системой дифференциальных уравнений и их исследованию и решению.

1.3.1. Дифференциальное уравнение теплопроводности

Выделим в рассматриваемом теле элементарный параллелепипед с ребрами, параллельными координатным осям и равными соответственно dx , dy , dz . В центре параллелепипеда поместим точку $M(x, y, z)$. На рис. 2.8 изображено сечение этого параллелепипеда плоскостью, параллельной плоскости xOy . Ось z проходит перпендикулярно плоскости чертежа.

Плотность теплового потока $\vec{q}$ можно разложить на три составляющие, направленные вдоль координатных осей: q_x, q_y, q_z . При этом

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}; \quad q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}; \quad q_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (2.18)$$

Количество тепла, переданного вовнутрь параллелепипеда через левую грань, составляет $q_x \cdot dy \cdot dz \cdot dt$, а количество тепла, потерянное через правую грань, равно $(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx) dy \cdot dz \cdot dt$. В результате теплопередачи

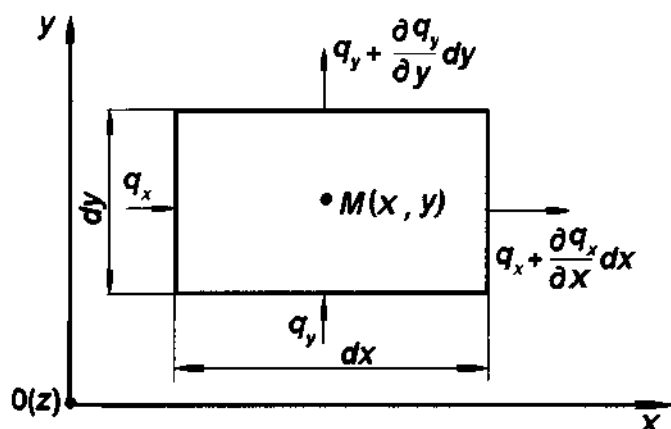


Рис. 2.8. Схема к выводу уравнения теплопроводности

вдоль оси x количество тепла, оставшееся в объеме параллелепипеда, изменится на величину

$$dQ_x = q_x \cdot dy \cdot dz \cdot dt - (q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx) dy \cdot dz \cdot dt = -\frac{\partial q_x}{\partial x} dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt.$$

Выполнив аналогичные рассуждения для теплопередачи вдоль осей y и z , получим следующие выражения:

$$dQ_y = -\frac{\partial q_y}{\partial y} dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt; \quad dQ_z = -\frac{\partial q_z}{\partial z} dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt.$$

Суммарное изменение теплосодержания равно

$$dQ_m = dQ_x + dQ_y + dQ_z = -(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}) dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt.$$

Подставив вместо q_x , q_y и q_z выражения (2.18), получаем

$$dQ_m = \left(\frac{\partial(\lambda \frac{\partial T}{\partial x})}{\partial x} + \frac{\partial(\lambda \frac{\partial T}{\partial y})}{\partial y} + \frac{\partial(\lambda \frac{\partial T}{\partial z})}{\partial z} \right) dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt.$$

В общем случае тело может совершать перемещение в пространстве, т.е. в точке $\vec{r}$ скорость $\vec{v}$ (x, y, z) может иметь компоненты v_x, v_y, v_z . При этом через часть пространства, ограниченную поверхностью параллелепипеда, будет происходить направленный массоперенос, т.е. дополнительно к теплопроводности осуществляться теплопередача конвекцией. В результате массопереноса вдоль оси x теплосодержание изменится на величину

$$dQ_{xx} = -c\rho \cdot v_x \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{\partial T}{\partial x} dx \cdot dt.$$

Аналогично для других направлений (вдоль осей y и z)

$$dQ_{yy} = -c\rho \cdot v_y \cdot dx \cdot dz \cdot \frac{\partial T}{\partial y} dy \cdot dt;$$

$$dQ_{zz} = -c\rho \cdot v_z \cdot dx \cdot dy \cdot \frac{\partial T}{\partial z} dz \cdot dt.$$

Суммарное изменение теплосодержания за счет конвективной теплопередачи составляет

$$dQ_k = -c\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt \left(v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right).$$

Полное изменение теплосодержания за счет теплопроводности и конвективной теплопередачи равно

$$dQ = dQ_m + dQ_k = \left[\frac{\partial(\lambda \frac{\partial T}{\partial x})}{\partial x} + \frac{\partial(\lambda \frac{\partial T}{\partial y})}{\partial y} + \frac{\partial(\lambda \frac{\partial T}{\partial z})}{\partial z} - c\rho \left(v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt.$$

В результате температура параллелепипеда изменится на величину dT , и изменение теплосодержания мы можем выразить формулой

$$dQ = c\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot dT.$$

Приравняв это выражение выведенному ранее, получим уравнение

$$\frac{\partial(\lambda \frac{\partial T}{\partial x})}{\partial x} + \frac{\partial(\lambda \frac{\partial T}{\partial y})}{\partial y} + \frac{\partial(\lambda \frac{\partial T}{\partial z})}{\partial z} - c\rho(v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z}) = c\rho \frac{\partial T}{\partial t}.$$

После преобразований получаем уравнение Фурье–Кирхгофа

$$c\rho(\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z}) = \frac{\partial(\lambda \frac{\partial T}{\partial x})}{\partial x} + \frac{\partial(\lambda \frac{\partial T}{\partial y})}{\partial y} + \frac{\partial(\lambda \frac{\partial T}{\partial z})}{\partial z}. \quad (2.19)$$

Если тело неподвижно, т.е. $v_x=0$, $v_y=0$ и $v_z=0$, то уравнение (2.19) преобразуется в уравнение Фурье

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial(\lambda \frac{\partial T}{\partial x})}{\partial x} + \frac{\partial(\lambda \frac{\partial T}{\partial y})}{\partial y} + \frac{\partial(\lambda \frac{\partial T}{\partial z})}{\partial z}. \quad (2.20)$$

Уравнения (2.19) и (2.20) справедливы и для переменных, зависящих от температуры или координат теплофизических коэффициентов c , ρ и λ . Если же эти коэффициенты постоянны, то при вычислении производных λ можно вынести за скобки. После преобразований уравнение принимает вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}). \quad (2.21)$$

где a – коэффициент температуропроводности тела, $\text{м}^2/\text{с}$; $a=\lambda/(c\rho)$.

Для одномерного поля уравнения (2.20) и (2.21) преобразуются в уравнения вида

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial(\lambda \frac{\partial T}{\partial x})}{\partial x}, \text{ или} \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{при } \lambda = \text{const.} \quad (2.23)$$

Если тело представляет собой неограниченный по длине цилиндр, то при симметричных условиях теплообмена уравнения теплопроводности принимают вид

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial(\lambda \frac{\partial T}{\partial r})}{\partial r} + \frac{\lambda}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r}, \quad \text{или} \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad \text{при } \lambda = \text{const.} \quad (2.25)$$

Для шара в аналогичных условиях справедливы уравнения

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial(\lambda \frac{\partial T}{\partial r})}{\partial r} + \frac{2\lambda}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r}, \quad \text{или} \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad \text{при } \lambda = \text{const.} \quad (2.27)$$

Уравнения (2.22)–(2.27) можно свести к следующим универсальным формулам:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial(\lambda \frac{\partial T}{\partial r})}{\partial r} + \frac{k\lambda}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r}, \quad \text{или} \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{k}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad \text{при } \lambda = \text{const.}, \quad (2.29)$$

где k – коэффициент, зависящий от конфигурации тела (для неограниченной плоской плиты $k=0$, для цилиндра $k=1$, для шара $k=2$);

r – радиальная координата (для цилиндра и шара), или координата, перпендикулярная плоскости плиты.

Если в объеме выделенного параллелепипеда действуют источники тепла (например, джоулево тепло при протекании по проводнику электри-

ческого тока, выделение теплоты кристаллизации при затвердевании отливки и т.п.), то в правые части уравнений (2.23), (2.25), (2.27) и (2.29) необходимо прибавить слагаемое $\frac{q_v}{c\rho}$, где q_v – удельная мощность источника

тепла, Вт/м³. Это слагаемое учитывает скорость изменения температуры за счет действия источника.

Полученные уравнения – уравнения второго порядка в частных производных параболического типа. Для того чтобы получить конкретные решения этих уравнений, необходимо сформулировать условия однозначности задачи.

Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что общее решение уравнения содержит произвольные постоянные, число которых равно порядку уравнения, т.е. наивысшему порядку содержащихся в нем производных. Таким образом, дифференциальное уравнение имеет бесчисленное множество решений. Для выделения из этого множества конкретного решения необходимо задать начальные условия.

Аналогично дифференциальное уравнение теплопроводности, устанавливающее связь между временными и пространственными изменениями температуры в любой точке тела, также имеет бесчисленное множество решений, удовлетворяющих физическим закономерностям теплопроводности. Чтобы из этого множества выбрать решение, характеризующее рассматриваемый процесс, необходимо дополнительно ввести отвечающие ему условия однозначности. Условия однозначности включают геометрические данные (форма и размеры тела или системы тел), физические условия (теплофизические характеристики (λ , c , ρ) тела) и краевые условия, которые представляют собой совокупность начальных и граничных условий.

Под начальными условиями в теории теплопроводности понимают распределение температуры в системе в некоторый, чаще всего начальный ($t=0$), момент времени, т.е. функцию $T(x, y, z, t=0)$. Очевидно, что начальные условия имеют смысл только для нестационарных тепловых задач.

Граничные условия предполагают задание тепловых условий на поверхности, ограничивающей тело, или на всех границах тел, входящих в рассматриваемую систему. В теории теплопроводности в зависимости от способа задания различают четыре рода граничных условий.

Граничные условия первого рода

В этом случае должны быть заданы законы изменения во времени температуры во всех граничных точках тела или системы тел, т.е. функции

$$T(x^*, y^*, z^*, t) = \varphi(x^*, y^*, z^*, t),$$

где x^* , y^* , z^* – координаты точек, лежащих на поверхностях, ограничивающих тело или систему тел.

Например, для протяженной плиты (рис. 2.9, а) граничные условия могут быть заданы в виде функций во времени на левой и правой границах плиты: $T(-R, t) = \varphi_1(t)$ и $T(R, t) = \varphi_2(t)$.

В частном случае, когда температуры на указанных границах зафиксированы и в ходе процесса не изменяются, граничные условия имеют вид $T(-R, t) = T_1 = \text{const}$ и $T(R, t) = T_2 = \text{const}$.

Когда температуры обеих поверхностей одинаковы ($T_1 = T_2$), температурная кривая внутри плиты симметрична, как показано на рис. 2.9, а. В этом случае нет необходимости выполнять расчет распределения температур для всей плиты, достаточно провести его для любой из половин плиты, например для точек плиты с координатами $0 \leq x \leq R$.

Граничное условие на левой границе этой области определяется исходя из симметричности температурной кривой относительно плоскости $x=0$. Так как при $x=0$ касательная к температурной кривой горизонтальна, т.е. тангенс ее наклона к оси x равен нулю, то $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$. Поэтому граничное ус-

ловие следует задать в виде равенства $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = 0$.

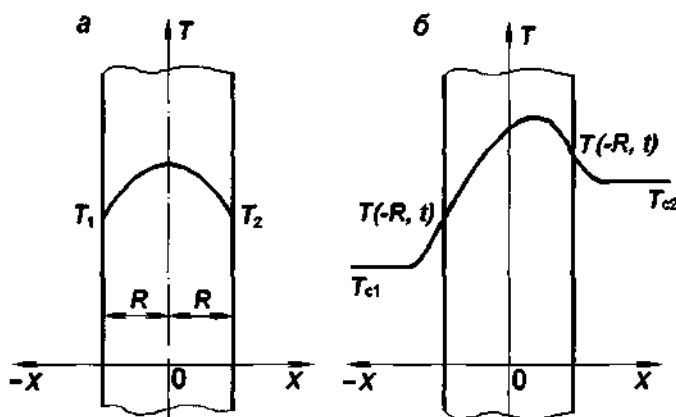


Рис. 2.9. Неограниченная плита. Граничные условия:
а – первого и второго рода; б – третьего рода (при теплообмене с окружающей средой)

Граничные условия второго рода

Они предполагают задание распределения плотности теплового потока q на граничной поверхности тела как функции координат поверхности и времени, т.е. функции

$$q(x^*, y^*, z^*, t) = f(x^*, y^*, z^*, t).$$

Так как $q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}$, имеем

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_S = f(x^*, y^*, z^*, t), \text{ или } \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_S = -f(x^*, y^*, z^*, t) / \lambda, \quad (2.30)$$

где $\left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_S$ – градиент температур в каждой точке поверхности S .

Например, для изображенной на рис. 2.9 плиты граничное условие второго рода можно записать в виде равенств

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=-R} = -\frac{f_2(x=-R, t)}{\lambda} \text{ и } \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=R} = -\frac{f_2(x=R, t)}{\lambda}. \quad (2.31)$$

Если, например, правая поверхность плиты теплоизолирована, т.е. $q(x=R, t)=0$, то граничное условие для нее, как следует из выражения (2.30), имеет вид $\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=R} = 0$.

Граничные условия третьего рода

Данные условия формулируют, когда теплообмен поверхности тела с окружающей средой осуществляется по законам конвекции или теплоизлучения. Плотность теплового потока от поверхности в окружающую среду удовлетворяет уравнению

$$q_c = \pm \alpha (T(x^*, y^*, z^*, t) - T_c).$$

С другой стороны, плотность теплового потока к поверхности изнутри тела равна $q_m = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_S$. Если на поверхности нет дополнительных

источников тепла, то $q_c = q_m$. Приравняв приведенные выражения, получим форму граничного условия третьего рода:

$$\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_s = \pm a (T(x^*, y^*, z^*, t) - T_c), \text{ или}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_s = \pm \frac{a}{\lambda} (T(x^*, y^*, z^*, t) - T_c). \quad (2.32)$$

Для неограниченной плиты (рис.2.9, б) граничные условия при теплообмене с окружающей средой имеют вид

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=-R} = \frac{a_1}{\lambda} (T(x=-R, t) - T_{c1}); \quad (2.33)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=R} = -\frac{a_2}{\lambda} (T(x=R, t) - T_{c2}), \quad (2.34)$$

где a_1 и a_2 – коэффициенты теплообмена с левой и правой поверхностями.

Знаки в уравнении (2.32) выбирают таким образом, чтобы знаки величин в левой и правой частях уравнения были одинаковыми. Например, в

уравнении (2.33) $\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=-R} > 0$ (температура повышается с ростом x) и

$(T(x=-R, t) - T_{c1}) > 0$. В уравнении (2.34) $\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=R} < 0$ (температура убывает с ростом x). Так как $(T(x=R, t) - T_{c2}) > 0$, то, чтобы знаки были одинаковыми, перед правой частью нужно поставить знак «минус».

Из уравнения (2.32) как частные случаи можно получить условия первого и второго родов.

При $a \rightarrow \infty$ из выражения $T(x^*, y^*, z^*, t) - T_c = \pm \frac{\lambda}{a} \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_s$ находим

$T(x^*, y^*, z^*, t) - T_c = 0$ и $T(x^*, y^*, z^*, t) = T_c$, т.е. при бесконечно большой интенсивности охлаждения температура поверхности тела практически равна температуре окружающей среды.

При $a \rightarrow 0$ из уравнения (2.32) получаем $\left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_s = 0$, что совпадает по смыслу с равенством (2.31).

Граничные условия четвертого рода

Они имеют место при идеальном тепловом контакте двух тел. В этом случае точки, лежащие на границе, одновременно принадлежат обоим телам. Поэтому на поверхности контакта температуры обоих тел становятся одинаковыми в первое же мгновение после приведения тел в соприкосновение, т.е.

$$T_1(x^*, y^*, z^*, t) = T_2(x^*, y^*, z^*, t). \quad (2.35)$$

Если в месте контакта тел не действуют источники тепла, то плотности тепловых потоков обоих тел около границы одинаковы, т.е.

$$q_1(x^*, y^*, z^*, t) = q_2(x^*, y^*, z^*, t), \text{ или}$$

$$\lambda_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial n} \right)_s = \lambda_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial n} \right)_s. \quad (2.36)$$

Совокупность уравнений (2.35) и (2.36) представляет собой формулировку граничных условий четвертого рода. Например, для системы двух полуограниченных по длине стержней (рис. 2.10) граничные условия задаются выражениями

$$T_1(x=0, t) = T_2(x=0, t); \quad \lambda_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial x} \right)_{x=0} = \lambda_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial x} \right)_{x=0}.$$

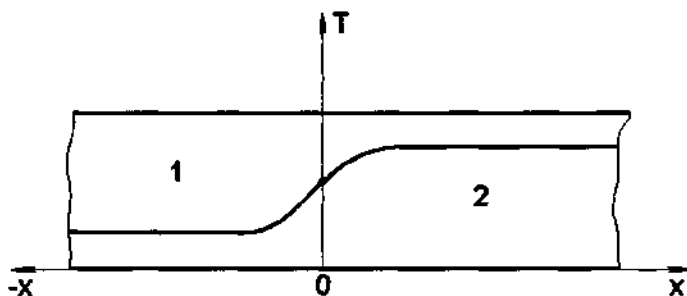


Рис. 2.10. Граничное условие четвертого рода для двух полуограниченных стержней

Если на границе тел действует источник тепла поверхностной мощностью q_0 (Вт/м²), уравнение (2.36) принимает вид

$$\lambda_1 \left| \left(\frac{\partial T_1}{\partial n} \right)_s \right| = \lambda_2 \left| \left(\frac{\partial T_2}{\partial n} \right)_s \right| \pm q_0. \quad (2.37)$$

В случае выделения тепла $q_0 > 0$, а при его поглощении $q_0 < 0$. Здесь учтено, что при положительном значении q_0 тепло должно вместе с подводимым к границе теплом (от тела с большей температурой) отводиться в тело с меньшей температурой. При поглощении тепла ($q_0 < 0$) оно в сумме с теплом, отводимым в более холодное тело, должно равняться теплу, подводимому к границе от более нагретого тела.

1.3.2. Стационарный режим теплопроводности

Стационарное температурное поле характеризуется постоянством температур во всех точках системы во времени, т.е. необходимым и достаточным условием стационарной теплопроводности является $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$. С учетом этого уравнение теплопроводности (2.20) для стационарного режима можно записать в виде

$$\frac{\partial(\lambda \frac{\partial T}{\partial x})}{\partial x} + \frac{\partial(\lambda \frac{\partial T}{\partial y})}{\partial y} + \frac{\partial(\lambda \frac{\partial T}{\partial z})}{\partial z} = 0. \quad (2.38)$$

При $\lambda = \text{const}$ уравнение (2.38) принимает вид

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0. \quad (2.39)$$

Общее уравнение для тел классических конфигураций (неограниченные плита, цилиндр, шар) для стационарного режима получаем, приравняв нулю $\frac{\partial T}{\partial t}$ в уравнении (2.39).

$$\frac{d(\lambda \frac{\partial T}{\partial r})}{dr} + \frac{k\lambda}{r} \cdot \frac{dT}{dr} = 0. \quad (2.40)$$

При $\lambda = \text{const}$ уравнение (2.40) преобразуется в уравнение вида

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{k}{r} \cdot \frac{dT}{dr} = 0. \quad (2.41)$$

Приняв значение коэффициента k равным нулю, из выражения (2.41) получаем уравнение стационарной теплопроводности для неограниченной плиты

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0. \quad (2.42)$$

Принято, что геометрическая координата r отсчитывается вдоль оси x , направленной перпендикулярно к плоскости плиты.

С учетом того что для цилиндра коэффициент k в выражении (2.41) равен 1, а для шара $k=2$, соответствующие уравнения стационарной теплопроводности имеют вид:

- для цилиндра

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dT}{dr} = 0; \quad (2.43)$$

- для шара

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{dT}{dr} = 0. \quad (2.44)$$

Так как при стационарной теплопроводности $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, то задание начальных условий не имеет смысла.

Рассмотрим решение уравнений стационарной теплопроводности для тел классической конфигурации при различных граничных условиях.

Неограниченная плоская плита

В соответствии с рис. 2.11, а граничные условия первого рода имеют вид $T(x=0)=T_1$ и $T(x=\delta)=T_2$, где T_1 и T_2 – некоторые заданные значения температуры.

Решим при данных граничных условиях дифференциальное уравне-

ние $\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$. Поскольку $\frac{d}{dx} \frac{dT}{dx} = 0$, то $\frac{dT}{dx} = C_1$. После интегрирования

$\int dT = \int C_1 \cdot dx$ имеем

$$T = C_1 \cdot x + C_2, \quad (2.45)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, значения которых находим с учетом граничных условий из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} C_2 &= T_1; \quad C_1 \delta + C_2 = T_2; \\ C_1 &= (T_2 - T_1) / \delta. \end{aligned}$$

Подставив C_1 и C_2 в выражение (2.45), получаем следующее уравнение, описывающее распределение температур в плите:

$$T = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{\delta} x. \quad (2.46)$$

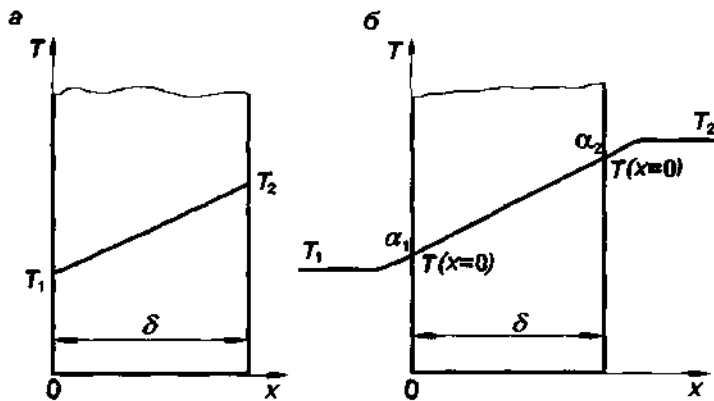


Рис. 2.11. Распределение температур в плите при граничных условиях первого (а) и третьего (б) родов

Из уравнения (2.46) видно, что при стационарной теплопроводности в неограниченной плите графиком распределения температуры по ее толщине является прямая линия. Можно сделать и обратное заключение: при линейном распределении температур в плоской плите обязательно имеет место стационарный режим теплопроводности.

Найдем значение плотности теплового потока через плиту:

$$q = \lambda \left| \frac{dT}{dx} \right| = \lambda \frac{T_2 - T_1}{\delta}. \quad (2.47)$$

Согласно выражению (2.47) q не зависит от координаты x . Это соответствует закону сохранения энергии. Так как температура во всех точках по толщине плиты не зависит от времени, то количество теплоты, приходящее в единицу времени в любую точку, должно равняться количеству теплоты, отводимому от нее в соседние объемы, т.е. $Q_f = q \cdot S$ не должно зависеть от координаты x , $q \cdot S = \text{const}$. Поскольку площадь сечения плиты, перпендикулярного оси x , не зависит от координаты x , то $q = \frac{\text{const}}{S}$

также не должно зависеть от x .

Количество тепла, передаваемого через плиту площадью S за время t , можно определить по формуле

$$Q = qSt = \lambda St \frac{T_2 - T_1}{\delta} = \alpha (T_2 - T_1) \cdot St,$$

где α – коэффициент теплопередачи через плиту, $\alpha = \lambda / \delta$.

Рассмотрим граничное условие третьего рода (рис. 2.11, б). На рисунке показана плита, разделяющая две среды с постоянными во времени температурами T_1 и T_2 и коэффициентами α_1 и α_2 . Граничные условия запишем в виде

$$\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} = \alpha_1 (T(x=0) - T_1) \quad \text{и} \quad \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=\delta} = -\alpha_2 (T(x=\delta) - T_2).$$

Общее решение дифференциального уравнения (2.42) будет иметь вид $T = C_1 x + C_2$. Найдем $\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0}$ и $\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=\delta}$.

Очевидно, что $\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} = \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=\delta} = C_1$. Подставив $x=0$ и $x=\delta$ в общее решение уравнения, находим $T(x=0) = C_2$ и $T(x=\delta) = C_1 \cdot \delta + C_2$. С учетом значений $\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0}$, $\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=\delta}$, $T(x=0)$ и $T(x=\delta)$ граничные условия принимают вид $\lambda \cdot C_1 = \alpha_1 (C_2 - T_1)$ и $\lambda \cdot C_1 = -\alpha_2 (C_1 \cdot \delta + C_2 - T_2)$. Преобразовав эти выражения, получаем следующую линейную систему:

$$\begin{aligned}(\alpha_1 + \alpha_2) C_2 + \alpha_2 \cdot C_1 \cdot \delta &= \alpha_1 \cdot T_1 + \alpha_2 \cdot T_2; \\ \alpha_1 \cdot C_2 - \lambda \cdot C_1 &= \alpha_1 \cdot T_1.\end{aligned}$$

После решения системы получаем

$$C_1 = \frac{T_2 - T_1}{\delta(1 + \frac{\lambda}{\delta \cdot \alpha_2} + \frac{\lambda}{\delta \cdot \alpha_1})} \text{ и } C_2 = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{\delta(\frac{\alpha_1}{\lambda} + \frac{\alpha_1}{\delta \cdot \alpha_2} + \frac{1}{\delta})}.$$

С учетом этих значений C_1 и C_2 из общего решения выводим уравнение для распределения температуры по толщине плиты:

$$T = \frac{(T_2 - T_1)x}{\delta(1 + \frac{\lambda}{\delta \cdot \alpha_2} + \frac{\lambda}{\delta \cdot \alpha_1})} + T_1 + \frac{T_2 - T_1}{\delta(\frac{\alpha_1}{\lambda} + \frac{\alpha_1}{\delta \cdot \alpha_2} + \frac{1}{\delta})}. \quad (2.48)$$

Из уравнения (2.48) видно, что в данном случае температура также изменяется по толщине плиты по линейному закону.

Найдем плотность теплового потока:

$$q = \lambda \left| \frac{dT}{dx} \right| = \frac{\lambda(T_2 - T_1)}{\delta(1 + \frac{\lambda}{\delta \cdot \alpha_2} + \frac{\lambda}{\delta \cdot \alpha_1})}. \quad (2.49)$$

Формулу (2.49) можно выразить в виде

$$q = \alpha(T_2 - T_1). \quad (2.50)$$

Сравнив выражения (2.49) и (2.50), выводим формулу для расчета коэффициента теплопередачи от среды через плиту к другой среде:

$$\alpha = \frac{q}{T_2 - T_1} = \frac{1}{\frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_1}}. \quad (2.51)$$

Величины $\frac{\delta}{\lambda}, \frac{1}{\alpha_2}, \frac{1}{\alpha_1}$ называют *термическим сопротивлением* теплопередаче теплопроводностью в плите, конвекцией от среды 2 к плите и конвекцией от плиты к среде 1.

Величина $1/\alpha$ определяет термическое сопротивление всей системы. Из формулы (2.51) получаем

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_1}, \quad (2.52)$$

т.е. термические сопротивления складываются.

Для иллюстрации рассмотрим решение задачи. Требуется определить потери тепла в единицу времени через стенки нагревательной печи при следующих условиях: толщина стенки печи $\delta=250$ мм, суммарная площадь стенок печи $S=90$ м², коэффициент теплопроводности стенки печи $\lambda=0,5$ Вт/(см·К), температура газов в печном пространстве $T_1=1000$ °С, температура окружающей среды $T_2=20$ °С, коэффициент теплоотдачи от газов к внутренней поверхности печи $\alpha_1=0,2$ Вт/(см²·К), а от наружной поверхности стенки к среде $\alpha_2=0,002$ Вт/(см²·К).

По формуле (2.51) вычислим коэффициент теплопередачи через стенку печи:

$$\alpha = \frac{\delta_1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} = \frac{1}{\frac{1}{0,2} + \frac{25}{0,5} + \frac{1}{0,002}} = 0,0019 \text{ Вт/(см}^2\cdot\text{К)}.$$

Плотность теплового потока $q=\alpha(T_1-T_2)=0,0019\cdot(1000-20)=1,86$ Вт/см². Тепловые потери через стенки печи $Q=q\cdot S=1,86\cdot 90\cdot 10^4=167,4\cdot 10^4$ Вт. Таким образом, каждую секунду от печи поступает в окружающую среду $167,4\cdot 10^4$ Дж тепла, т.е. при теплотворной способности топлива (каменный уголь), равной $Q^p=25\cdot 10^6$ Дж/кг, для компенсации этих тепловых потерь нужно сжигать $\frac{Q}{Q^p} = \frac{167,4\cdot 10^4}{25\cdot 10^6} \approx 6,6\cdot 10^{-2} = 0,066$ кг топлива в секунду, или 237,6 кг в час.

Для снижения тепловых потерь и расхода топлива необходимо с наружной стороны стенки печи выполнить теплоизоляционное покрытие из материала, коэффициент теплопроводности которого значительно ниже теплопроводности стенки печи. Здесь мы приходим к задаче о теплопередаче через двухслойную плоскую стенку.

В заключение рассмотрим стационарную теплопередачу через плоскую оболочку, состоящую из двух контактирующих плит (рис. 2.12).

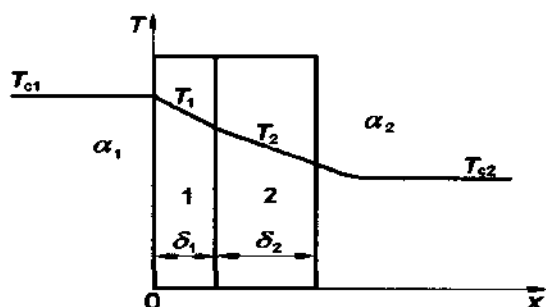


Рис. 2.12. Схема, иллюстрирующая теплопередачу через систему двух плит

Напишем уравнение теплопроводности для двух плит и граничные условия:

$$\frac{dT_1^2}{dx^2} = 0; \quad (2.53)$$

$$\frac{dT_2^2}{dx^2} = 0; \quad (2.54)$$

$$\alpha_1(T_{c1} - T_1(x=0)) = -\lambda_1 \left(\frac{dT_1}{dx} \right)_{x=0}; \quad (2.55)$$

$$\alpha_2(T_2(x=\delta_1 + \delta_2) - T_{c2}) = -\lambda_2 \left(\frac{dT_2}{dx} \right)_{x=\delta_1 + \delta_2}; \quad (2.56)$$

$$T_1(x=\delta) = T_2(x=\delta); \quad (2.57)$$

$$\lambda_1 \left(\frac{dT_1}{dx} \right)_{x=\delta} = \lambda_2 \left(\frac{dT_2}{dx} \right)_{x=\delta}. \quad (2.58)$$

Решения уравнений (2.53) и (2.54) содержат четыре произвольные постоянные, значения которых можно найти, используя граничные условия (2.55)–(2.58).

$$\begin{aligned}T_1 &= C_1 x + C_2; \quad T_2 = C_3 x + C_4; \\ \alpha_1 (T_{c1} - C_2) &= -\lambda_1 C_1; \\ \alpha_2 (C_3 (\delta_1 + \delta_2) + C_4 - T_{c2}) &= -\lambda_2 C_3; \\ C_1 \delta_1 + C_2 &= C_3 \delta_1 + C_4; \\ \lambda_1 C_1 &= \lambda_2 C_3.\end{aligned}$$

Решая эту линейную систему относительно постоянных C_1 , C_2 , C_3 и C_4 , находим

$$\begin{aligned}C_1 &= \frac{\lambda_2 (T_{c2} - T_{c1})}{\lambda_1 \left(\frac{\delta_1 \lambda_2}{\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{\alpha_1} + \frac{\lambda_2}{\alpha_2} + \delta_2 \right)}; \quad C_2 = T_{c1} + \frac{\lambda_2 (T_{c2} - T_{c1})}{\alpha_1 \left(\frac{\delta_1 \lambda_2}{\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{\alpha_1} + \frac{\lambda_2}{\alpha_2} + \delta_2 \right)}; \\ C_3 &= \frac{T_{c2} - T_{c1}}{\frac{\delta_1 \lambda_2}{\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{\alpha_1} + \frac{\lambda_2}{\alpha_2} + \delta_2}; \quad C_4 = T_{c1} + \frac{(T_{c2} - T_{c1}) \left(\frac{\delta_1 \lambda_2}{\lambda_1} - \delta_1 + \frac{\lambda_2}{\alpha_1} \right)}{\frac{\delta_1 \lambda_2}{\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{\alpha_1} + \frac{\lambda_2}{\alpha_2} + \delta_2};\end{aligned}$$

Подставив эти выражения в общие решения уравнений (2.53) и (2.54), получаем следующие формулы для расчета распределений температур в плитах:

$$\begin{aligned}T_1 &= T_{c1} + \frac{\lambda_2 (T_{c2} - T_{c1})}{\alpha_1 \left(\frac{\delta_1 \lambda_2}{\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{\alpha_1} + \frac{\lambda_2}{\alpha_2} + \delta_2 \right)} + \frac{\lambda_2 (T_{c2} - T_{c1}) x}{\lambda_1 \left(\frac{\delta_1 \lambda_2}{\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{\alpha_1} + \frac{\lambda_2}{\alpha_2} + \delta_2 \right)}; \\ T_2 &= T_{c1} + \frac{(T_{c2} - T_{c1}) \left(\frac{\delta_1 \lambda_2}{\lambda_1} - \delta_1 + \frac{\lambda_2}{\alpha_1} \right)}{\frac{\delta_1 \lambda_2}{\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{\alpha_1} + \frac{\lambda_2}{\alpha_2} + \delta_2} + \frac{(T_{c2} - T_{c1}) x}{\frac{\delta_1 \lambda_2}{\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{\alpha_1} + \frac{\lambda_2}{\alpha_2} + \delta_2}.\end{aligned}$$

Подставив в уравнение для расчета T_1 $x=0$ и $x=\delta$, найдем $T_1(x=0)$ и $T_1(x=\delta)$:

$$T_1(x=0) = T_{c1} + \frac{\lambda_2(T_{c2} - T_{c1})}{\alpha_1(\frac{\delta_1\lambda_2}{\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{\alpha_1} + \frac{\lambda_2}{\alpha_2} + \delta_2)};$$

$$T_1(x=\delta) = T_{c1} + \frac{(T_{c2} - T_{c1})(\frac{\delta_1\lambda_2}{\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{\alpha_1})}{\frac{\delta_1\lambda_2}{\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{\alpha_1} + \frac{\lambda_2}{\alpha_2} + \delta_2}.$$

Подставив в уравнение для расчета T_2 $x=\delta_1$ и $x=\delta_1+\delta_2$, найдем

$$T_1(x=\delta_1) = T_{c1} + \frac{(T_{c2} - T_{c1})(\frac{\delta_1\lambda_2}{\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{\alpha_1})}{\frac{\delta_1\lambda_2}{\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{\alpha_1} + \frac{\lambda_2}{\alpha_2} + \delta_2};$$

$$T_1(x=\delta_1+\delta_2) = T_{c1} + \frac{(T_{c2} - T_{c1})(\frac{\delta_1\lambda_2}{\lambda_1} + \delta_2 + \frac{\lambda_2}{\alpha_1})}{\frac{\delta_1\lambda_2}{\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{\alpha_1} + \frac{\lambda_2}{\alpha_2} + \delta_2}.$$

Очевидно, что $T_1(x=\delta_1)=T_2(x=\delta_2)$.

Плотности теплового потока от первой среды к первой плите q_1 , через первую плиту q_2 , через вторую плиту q_3 и от второй плиты ко второй среде q_4 равны, т.е. $q_1=q_2=q_3=q_4=q$.

$$q_1 = \alpha_1(T_{c1} - T_1(x=0)) = q;$$

$$q_2 = -\lambda_1(\frac{dT_1}{dx})_{x=0} = \frac{\lambda_2(T_{c2} - T_{c1})}{\frac{\delta_1\lambda_2}{\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{\alpha_1} + \frac{\lambda_2}{\alpha_2} + \delta_2} = q;$$

$$q_3 = -\lambda_2(\frac{dT_2}{dx})_{x=\delta_1} = \frac{\lambda_2(T_{c2} - T_{c1})}{\frac{\delta_1\lambda_2}{\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{\alpha_1} + \frac{\lambda_2}{\alpha_2} + \delta_2} = q;$$

$$q_4 = \alpha_2(T_2(x = \delta_1 + \delta_2) - T_{c2}) = q.$$

С учетом выражений для вычисления $T_1(x=0)$ и $T_2(x=\delta_1+\delta_2)$ получаем

$$q_1 = \frac{\lambda_2(T_{c2} - T_{c1})}{\frac{\delta_1 \lambda_2}{\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{\alpha_1} + \frac{\lambda_2}{\alpha_2} + \delta_2}; \quad q_2 = \frac{\lambda_2(T_{c2} - T_{c1})}{\frac{\delta_1 \lambda_2}{\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{\alpha_1} + \frac{\lambda_2}{\alpha_2} + \delta_2}.$$

Сравнение выражений для расчета q_1 , q_2 , q_3 и q_4 показывает, что они одинаковы.

Плотность теплового потока можно выразить через коэффициент теплопередачи α в системе $q = \alpha(T_{c1} - T_{c2})$. Приравняв это выражение полученной выше формуле для вычисления q и разрешив данное уравнение относительно α , находим

$$\alpha = \frac{q}{T_{c1} - T_{c2}} = \frac{\lambda_2}{\frac{\delta_1 \lambda_2}{\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{\alpha_1} + \frac{\lambda_2}{\alpha_2} + \delta_2} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{1}{\alpha_2}}. \quad (2.59)$$

Из выражения (2.59) получаем $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{1}{\alpha_2}$, т.е. термические сопротивления в этом случае также складываются.

Данную задачу можно решить проще, применяя формулу (2.47) для расчета плотности теплового потока через плоскую стенку при граничных условиях первого рода.

$$q_1 = \alpha_1(T_{c1} - T_1(x=0)) = q;$$

$$q_2 = \lambda_1 \frac{T_1(x=0) - T_1(x=\delta)}{\delta_1} = q;$$

$$q_3 = \lambda_2 \frac{T_1(x=\delta) - T_2(x=\delta_1 + \delta_2)}{\delta_2} = q;$$

$$q_4 = \alpha_2(T_2(x = \delta_1 + \delta_2) - T_{c2}) = q.$$

Преобразуем уравнения

$$T_{c1} - T_1(x=0) = q / \alpha_1; \quad (2.60)$$

$$T_1(x=0) - T_1(x=\delta) = q \delta_1 / \lambda_1; \quad (2.61)$$

$$T_1(x=\delta) - T_2(x=\delta_1 + \delta_2) = q \delta_2 / \lambda_2; \quad (2.62)$$

$$T_2(x=\delta_1 + \delta_2) - T_{c2} = q / \alpha_2. \quad (2.63)$$

Суммируя уравнения, получаем

$$T_{c1} - T_{c2} = q \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{1}{\alpha_2} \right); \quad q = \frac{T_{c1} - T_{c2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{1}{\alpha_2}}. \quad (2.64)$$

Отсюда $\alpha = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{1}{\alpha_2}}$, что соответствует формуле (2.59).

С учетом выражения (2.64) значения $T_1(x=0)$, $T_1(x=\delta_1)=T_2(x=\delta_1)$ и $T_2(x=\delta_1+\delta_2)$ можно найти из уравнений (2.60), (2.61) и (2.63).

Применяя этот метод, легко вывести выражение для расчета коэффициента теплопередачи через систему из любого числа плит:

$$\alpha = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}}, \quad (2.65)$$

где N – число плит.

Неограниченный полый цилиндр

На рис. 2.13, а показана схема полого цилиндра при граничных условиях первого рода. Напишем дифференциальное уравнение для цилиндра (при $\lambda = \text{const}$) и граничные условия:

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dT}{dr} = 0; \quad T(r=R_1)=T_1 \text{ и } T(r=R_2)=T_2.$$

Для интегрирования уравнения примем следующие обозначения:

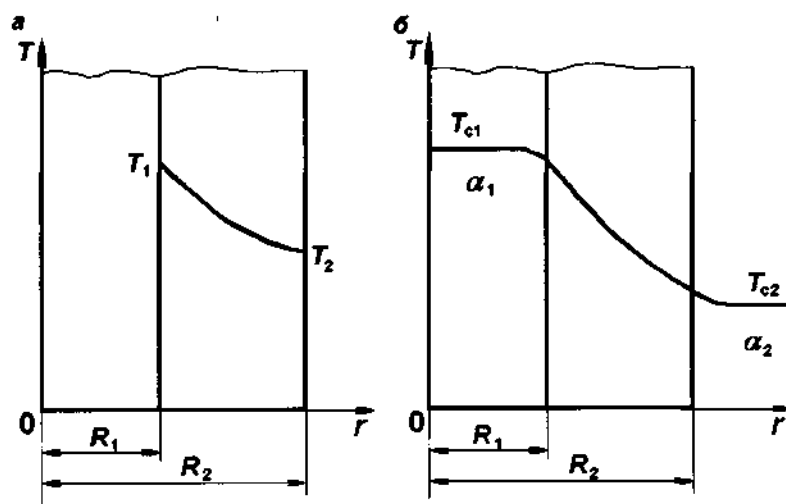


Рис. 2.13. Схема полого цилиндра при граничных условиях первого (а) и третьего (б) родов

$$U = r \frac{dT}{dr};$$

$$\frac{dU}{dr} = \frac{dT}{dr} + r \frac{d^2T}{dr^2} = r \left(\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dT}{dr} \right);$$

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dT}{dr} = \frac{1}{r} \cdot \frac{dU}{dr}.$$

С учетом этого исходное уравнение принимает вид

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{dU}{dr} = 0, \text{ или } \frac{dU}{dr} = 0.$$

В результате интегрирования находим $U = C_1$, или $r \frac{dT}{dr} = C_1$. После разделения переменных получаем $\int dT = C_1 \int dr / r$; $T = C_1 \ln r + C_2$. Для определения постоянных C_1 и C_2 используем граничные условия:

$$T_1 = C_1 \ln R_1 + C_2;$$

$$T_2 = C_1 \ln R_2 + C_2.$$

Вычитая из первого уравнения второе, после преобразований получаем $C_1 = \frac{T_1 - T_2}{\ln(R_1 / R_2)}$. Из первого уравнения с учетом выражения для C_1

находим $C_2 = \frac{T_2 \ln R_1 - T_1 \ln R_2}{\ln(R_1 / R_2)}$. Подставив выражения для C_1 и C_2 в общее

решение, получаем формулу для расчета температуры в стенке цилиндра:

$$T = \frac{(T_1 - T_2) \ln r}{\ln(R_1 / R_2)} + \frac{T_2 \ln R_1 - T_1 \ln R_2}{\ln(R_1 / R_2)}. \quad (2.66)$$

Найдем выражение для определения плотности теплового потока:

$$q = -\lambda \frac{dT}{dr} = \frac{\lambda(T_1 - T_2)}{r \ln(R_1 / R_2)}. \quad (2.67)$$

Как видно из формул (2.66) и (2.67), в отличие от теплопередачи через плоскую стенку распределение температур по стенке в данном случае нелинейное, а величина q с ростом r уменьшается. Последний факт легко объясняется тем, что площадь изотермической поверхности, равная $S = 2\pi rH$ (где H – высота цилиндра), с ростом r увеличивается. Поэтому количество тепла, передаваемого через стенку, от координаты r не зависит.

$$Q = qst = \frac{\lambda(T_1 - T_2)}{r \ln(R_1 / R_2)} \cdot 2\pi rHt = \frac{2\pi(T_1 - T_2)H\lambda t}{\ln(R_1 / R_2)}.$$

Выражение для определения Q можно представить в виде

$$Q_u = \frac{Q}{Ht} = \alpha(T_1 - T_2), \quad (2.68)$$

где $\alpha = \frac{1}{\frac{1}{2\pi\lambda} \cdot \ln(R_2 / R_1)}$ – коэффициент теплопередачи через стенку.

На рис. 2.13, б приведена схема цилиндрической стенки при граничных условиях третьего рода.

Количество тепла, передаваемое от среды к внутренней поверхности стенки, можно выразить формулой $Q_{n1} = \alpha_1 (T_{c1} - T(r = R_1)) 2\pi R_1$. Аналогично количество тепла, отдаваемое стенкой в окружающую среду, равно $Q_{n3} = \alpha_2 (T(r = R_2) - T_{c2}) 2\pi R_2$. В соответствии с формулой (2.68) количество тепла, передаваемого через стенку, составляет

$$Q_{n2} = \frac{2\pi\lambda}{\ln(R_2/R_1)} (T(r = R_1) - T(r = R_2)).$$

Очевидно, что $Q_{n1} = Q_{n2} = Q_{n3} = Q_n$. В преобразованном виде уравнения для расчета Q_{n1} , Q_{n2} и Q_{n3} принимают вид

$$\begin{aligned} T_{c1} - T(r = R_1) &= \frac{Q_n}{\alpha_1 \cdot 2\pi R_1}; \\ T(r = R_1) - T(r = R_2) &= \frac{Q_n \ln(R_2/R_1)}{2\pi\lambda}; \\ T(r = R_2) - T_{c2} &= \frac{Q_n}{\alpha_2 2\pi R_2}. \end{aligned}$$

Сложив уравнения, находим

$$T_{c1} - T_{c2} = Q_n \left(\frac{1}{\alpha_1 2\pi R_1} + \frac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi\lambda} + \frac{1}{\alpha_2 2\pi R_2} \right), \text{ или}$$

$$Q_n = \alpha (T_{c1} - T_{c2}), \quad (2.69)$$

где α – коэффициент теплопередачи для системы,

$$\alpha = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 2\pi R_1} + \frac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi\lambda} + \frac{1}{\alpha_2 2\pi R_2}}. \quad (2.70)$$

Рассмотрим зависимость коэффициента теплопередачи α от наружного радиуса цилиндра R_2 при фиксированном значении внутреннего радиуса R_1 , т.е. от толщины стенки $\delta = R_2 - R_1$ при $R_1 = \text{const}$.

Найдем производную от термического сопротивления системы $R_m = \frac{1}{\alpha_1 2\pi R_1} + \frac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi\lambda} + \frac{1}{\alpha_2 2\pi R_2}$ по R_2 при $R_1 = \text{const}$ и приравняем ее к нулю.

$$\frac{\partial R_m}{\partial R_2} = \frac{1}{2\pi\lambda R_2} - \frac{1}{\alpha_2 2\pi R_2^2} = 0.$$

Решая это уравнение относительно R_2 , найдем критическое значение наружного радиуса $R_{2кр}$, при котором α , а следовательно, и Q_n принимают экстремальные значения:

$$R_{2кр} = \frac{\lambda}{\alpha_2}. \quad (2.71)$$

Анализ показывает, что R_m при $R_2 = R_{2кр}$ достигает минимума, а $\alpha = \frac{1}{R_m}$ — максимума.

Таким образом, сначала с увеличением R_2 (при $R_1 = \text{const}$) тепловые потери через стенку возрастают, так как при этом из-за увеличения ее толщины внутреннее термическое сопротивление $R_{вн}$ растет медленнее, чем падает сопротивление на наружной поверхности. При $R_2 > R_{2кр}$ снижение термического сопротивления теплоотдаче в среду с наружной поверхности

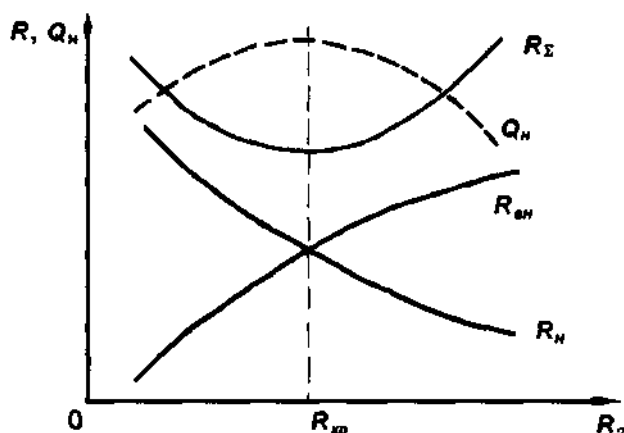


Рис. 2.14. Зависимости $Q_n(R_2)$, $R_{вн}(R_2)$ и $R_n(R_2)$

стенки $R_n = \frac{1}{\alpha_2 2\pi R_2}$ становится слабее увеличения внутреннего термического сопротивления. Поэтому α и Q_n при $R_2 > R_{2кр}$ уменьшаются. Зависимости $Q_n(R_2)$, $R_n(R_2)$ и $R_{ин}(R_2)$ схематично показаны на рис. 2.14. Видно, что увеличение толщины теплоизоляционной стенки не всегда приводит к уменьшению теплотерь.

Уравнение (2.71) следует учитывать при выборе материала для трубопроводов. На рис. 2.15, а приведена схема теплоизоляции трубопровода. Приведем без вывода формулу для расчета коэффициента теплопередачи α для многослойной цилиндрической стенки:

$$\alpha = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 2\pi R_1} + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{R_{i+1}}{R_i} + \frac{1}{\alpha_2 2\pi R_{N+1}}}, \quad (2.72)$$

где N – число слоев.

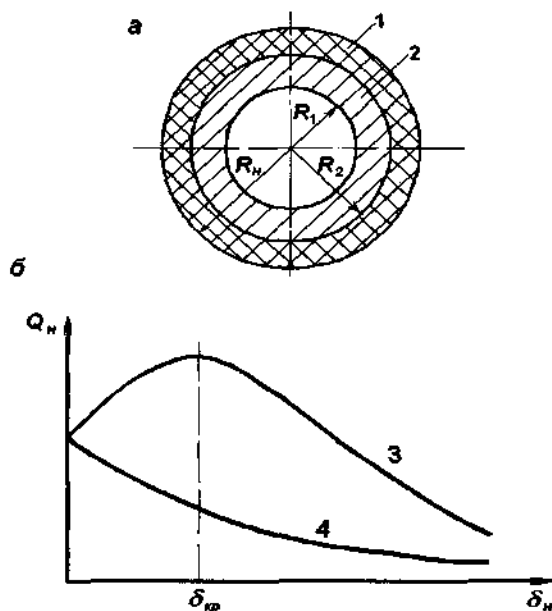


Рис. 2.15. Характер изменения теплотерь при теплоизоляции трубопровода:

а – схема теплоизоляции; б – влияние δ_n при $R_2 < \lambda_{ин}/\alpha_2$ (3) и $R_2 > \lambda_{ин}/\alpha_2$ (4);

1 – теплоизоляционное покрытие; 2 – стенка трубопровода

Проведя анализ для двухслойной стенки, аналогичный описанному выше для однослойной стенки при $R_1 = \text{const}$ и $R_2 = \text{const}$, получим следующее выражение для критического значения наружного радиуса изоляции R :

$$R_{н.кр} = \frac{\lambda_n}{\alpha_2},$$

где λ_n – коэффициент теплопроводности изоляции.

Очевидно, что если наружный диаметр трубопровода $R_2 > R_{н.кр} = \lambda_n / \alpha_2$, то с ростом толщины изоляции происходит монотонное уменьшение теплотерь (см. рис. 2.15, кривая 4). При $R_2 < \lambda_n / \alpha_2$ до некоторого значения толщины изоляции ($\delta_{кр} = \lambda_n / \alpha_2 - R_2$) теплотери увеличиваются, а затем убывают (см. рис. 2.15, кривая 3). Таким образом, материал теплоизоляции следует выбирать так, чтобы выполнялось условие $\lambda_n < \alpha_2 R_2$.

Исследование теплопередачи через полое сферическое тело и систему сферических стенок студенту предлагается выполнить самостоятельно.

Стационарный режим теплопроводности имеет место в металлургических печах при установившемся режиме их работы. Процессы же формирования отливки характеризуются резко нестационарным характером, что требует применения математического описания, основанного на применении методов нестационарной теплопроводности.

1.3.3. Теплопроводность при нестационарном режиме

Основной задачей при исследовании нестационарной теплопроводности является определение распределения температуры в системе в любой момент времени, т.е. нахождение функции $T = T(x, y, z, t)$.

Решение задачи сводится к интегрированию дифференциальных уравнений теплопроводности (2.20) или (2.21) для всех тел, входящих в систему, с учетом граничных условий на внешних и внутренних границах системы и начального условия.

Для примера приведем математическую постановку задачи по исследованию охлаждения неограниченной плоской плиты при граничных условиях третьего рода и равномерном распределении температуры по толщине плиты в начальный момент времени (рис. 2.16).

Напишем дифференциальное уравнение теплопроводности для плиты:

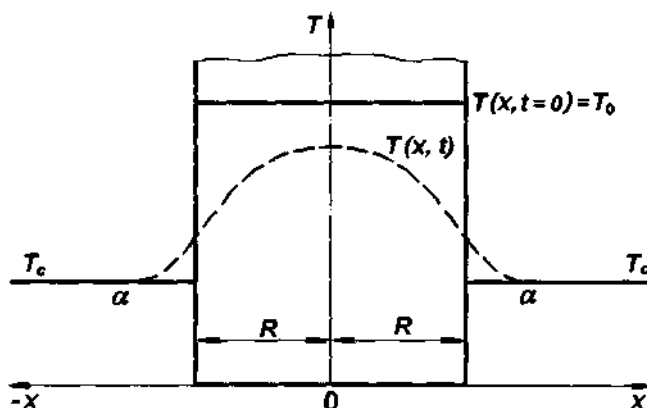


Рис. 2.16. Распределение температур в неограниченной плите при граничных условиях третьего рода

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad -R < x < R. \quad (2.73)$$

Граничные условия на двух граничных поверхностях тела ($x = -R$ и $x=R$) имеют вид

$$\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_{x=-R} = a(T(x=-R) - T_c); \quad (2.74)$$

$$\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_{x=R} = -a(T(x=R) - T_c). \quad (2.75)$$

При определении знаков в правых частях уравнений (2.74) и (2.75) учтено, что $\left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_{x=-R} > 0$ (температура с ростом x возрастает),

$\left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_{x=R} < 0$ (температура с ростом x убывает), а $(T(x=-R) - T_c)$ и $(T(x=R) - T_c)$ – положительные величины.

Начальное условие для плиты

$$T(x, t=0) = T_0 = \text{const.} \quad (2.76)$$

Уравнения (2.73)–(2.76) представляют собой замкнутую математическую модель охлаждения плиты в данных условиях.

Формулировку задачи можно упростить, приняв во внимание, что вследствие симметричных условий охлаждения $T(x, t) = T(-x, t)$. Следовательно, достаточно найти распределение температур, например, в правой половине плиты ($0 \leq x \leq R$).

На левой границе ($x=0$) граничное условие будет иметь вид

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = 0. \quad (2.77)$$

Граничное условие на правой границе ($x=R$) выражается уравнением (2.74), а начальное условие – равенством (2.76). Дифференциальное уравнение (2.73) распространено на область $0 < x < R$.

В качестве примера описания теплообмена в системе тел рассмотрим охлаждение плиты, имеющей при $t=0$ по всей толщине одинаковую температуру $T_1(x, t=0)=T_0$, в неограниченной среде с начальной температурой $T_2(x, t=0)=T_c$ (рис. 2.17).

В теплообмене участвуют два тела (плита и среда). Индекс «1» будем относить к температуре и параметрам плиты, а индекс «2» – к среде. Следовательно, необходимо написать два уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} \quad \text{при } -R < x < R; \quad (2.78)$$

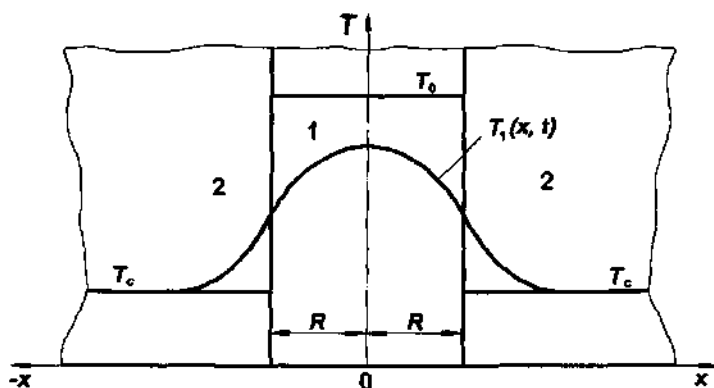


Рис. 2.17. Схема плоской плиты в неограниченной среде

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} \quad \text{при } x < -R \text{ и } x > R. \quad (2.79)$$

Предположим, что контакт плиты со средой (при $x = -R$ и $x = R$) является идеальным, т.е. в местах контакта будет иметь место граничное условие четвертого рода:

$$T_1(x = -R, t) = T_2(x = -R, t); \quad (2.80)$$

$$\lambda_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial x} \right)_{x=-R} = \lambda_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial x} \right)_{x=-R}; \quad (2.81)$$

$$\lambda_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial x} \right)_{x=R} = \lambda_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial x} \right)_{x=R}; \quad (2.82)$$

$$T_1(x = R, t) = T_2(x = R, t). \quad (2.83)$$

Левая и правая границы системы бесконечно удалены. Поэтому теплопередачей на них можно пренебречь.

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_{x=0} = 0; \quad (2.84)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_{x=0} = 0. \quad (2.85)$$

Начальные условия имеют вид

$$T_1(x, t=0) = T_0; \quad (2.86)$$

$$T_2(x, t=0) = T_c. \quad (2.87)$$

С учетом симметрии данная краевая задача может быть записана в более простом виде:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}, \quad 0 < x < R; \quad (2.88)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}, \quad R < x < \infty; \quad (2.89)$$

$$\left(\frac{\partial T_1}{\partial t}\right)_{x=0} = 0; \quad (2.90)$$

$$T_1(x=R, t) = T_2(x=R, t); \quad (2.91)$$

$$\lambda_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial t}\right)_{x=R} = \lambda_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial x}\right)_{x=R}; \quad (2.92)$$

$$\left(\frac{\partial T_2}{\partial x}\right)_{x \rightarrow \infty} = 0; \quad (2.93)$$

$$T_1(x, 0) = T_0; \quad (2.94)$$

$$T_2(x, 0) = T_c. \quad (2.95)$$

При написании краевых задач теплопроводности важно выделить все внутренние и внешние границы рассматриваемой системы тел и определить, исходя из физических условий теплообмена, род и конкретный вид граничных условий. После написания краевой задачи необходимо осуществить решение описывающей ее системы уравнений.

При интегрировании дифференциального уравнения (2.20) и уравнения (2.21) возникают труднопреодолимые математические проблемы. Поэтому примеров замкнутых аналитических решений этих уравнений очень мало.

Большие трудности возникают даже при решении такой относительно простой задачи, как рассмотренная выше задача охлаждения плиты в среде. Известные решения, как правило, относятся к одномерным температурным полям в телах классических конфигураций (шар, цилиндр и плита) при относительно простых граничных условиях [6, 9, 10]. Эти решения хорошо исследованы. В соответствии с ними составлены номограммы, которые можно использовать, например, при назначении режимов нагрева заготовок в металлургических печах [9, 10]. На рис. 2.18 приведена номограмма для расчета температуры в средней плоскости плоской заготовки при нагреве в печи, построенная по результатам решения краевой задачи (2.73)–(2.77).

По оси абсцисс номограммы отложено безразмерное время $Fo = at/\delta^2$ (критерий Фурье), а по оси ординат – относительная температура в сред-

ней плоскости плиты $\theta_y = \frac{T(x=0, t) - T_0}{T(x, t=0) - T_c}$. Линии номограммы проведе-

ны при разных значениях критерия Био $Bi = \alpha \delta / \lambda$, где α – коэффициент теплопередачи от печного пространства к плите; λ – коэффициент теплопроводности плиты; δ – толщина плиты, $\delta = 2R$.

На рис. 2.18 приведен пример определения времени нагрева плиты до температуры $T = 800^\circ\text{C}$ в печи при следующих условиях: $\alpha = 1163 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}$; $T(x, t=0) = T_0 = 20^\circ\text{C}$; $T_c = 1200^\circ\text{C}$.

Теплофизические свойства материала плиты: $c = 502,4 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$; $\rho = 7700 \text{ кг/м}^3$; $\lambda = 40,7 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$. Толщина плиты $\delta = 100 \text{ мм}$.

Произведем вычисления:

$$\theta = \frac{800 - 1200}{20 - 1200} = -\frac{400}{1180} = -0,34; \quad Bi = 1163 \cdot 0,1 / 40,7 = 2,85. \quad \text{По номо-}$$

грамме (см. рис. 2.18) по найденным значениям θ и Bi определяем $Fo = at/\delta^2 = 1$. Отсюда время нагрева плиты составит $t = \delta^2 \cdot Fo / a = 0,1^2 \cdot 1 \cdot c \cdot \rho / \lambda = 0,1^2 \cdot 1 \cdot 502,4 \cdot 7700 / 40,7 = 951 \text{ с}$, или $\approx 16 \text{ мин}$.

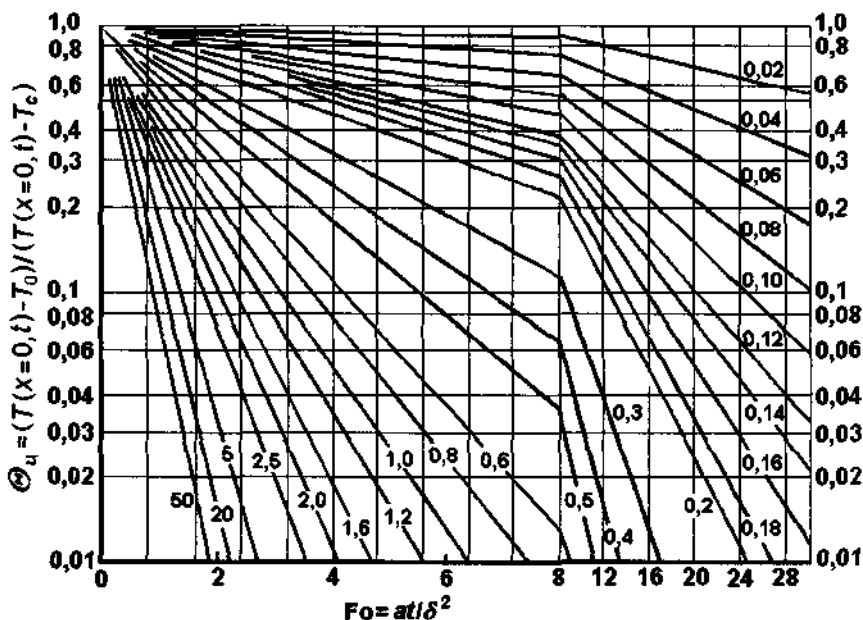


Рис. 2.18. Номограмма для расчета температуры в средней плоскости пластины при $T_0 = \text{const}$

Разработано большое число методов решения краевых задач теплопроводности. Однако все они основаны на фундаментальной дисциплине «Методы математической физики», которая выходит за рамки учебного плана. Поэтому в данной главе мы рассмотрим лишь простейший метод решения задачи (2.73)–(2.76), в также приведем анализ наиболее важных для рассмотрения литейных процессов решений.

Для решения краевой задачи (2.73)–(2.76) применим метод разделения переменных, сущность которого заключается в поиске решения в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от координаты x , а другая – только от времени t .

Введем безразмерную величину $\theta = \frac{T(x,t) - T_c}{T_0 - T_c}$. При этом

$$T(x, t) = T_c + \theta(T_0 - T_c); \quad \frac{\partial^2 T(x)}{\partial x^2} = (T_0 - T_c) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2};$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = (T_0 - T_c) \frac{\partial \theta}{\partial t}; \quad \frac{\partial T}{\partial t} = (T_0 - T_c) \frac{\partial \theta}{\partial t}.$$

С учетом этих выражений уравнения (2.73)–(2.76) принимают вид

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}; \quad (2.96)$$

$$\lambda \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x=-R} = a \theta(-R, t); \quad (2.97)$$

$$\lambda \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x=R} = -a \theta(R, t); \quad (2.98)$$

$$\theta(t = 0, x) = \frac{T_0 - T_c}{T_0 - T_c} = 1. \quad (2.99)$$

В соответствии со сказанным выше примем, что

$$\theta(x, t) = \Phi(x) \cdot R(t). \quad (2.100)$$

С учетом уравнения (2.96) находим

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \Phi(x) \cdot \frac{dR(t)}{dt}; \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = R(t) \cdot \frac{d^2 \Phi}{dx^2}.$$

Подставив эти выражения в уравнение (2.96), получим

$$\frac{1}{R(t)} \cdot \frac{dR(t)}{dt} = \frac{a}{\Phi(x)} \cdot \frac{d^2 \Phi}{dx^2}.$$

В левой части уравнения имеем выражение, зависящее только от t , а в правой – только от x . Две функции от двух разных, не зависящих друг от друга переменных могут быть равны при любых значениях последних только в том случае, если они постоянны. Обозначим эту величину $(-ak^2)$, где k – некоторая постоянная величина.

Таким образом,

$$\frac{1}{R(t)} \cdot \frac{dR(t)}{dt} = \frac{a}{\Phi(x)} \cdot \frac{d^2 \Phi(x)}{dx^2} = -ak^2.$$

Отсюда получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\frac{1}{R(t)} \cdot \frac{dR(t)}{dt} = -ak^2; \quad (2.101)$$

$$\frac{d^2 \Phi(x)}{dx^2} + k^2 \Phi(x) = 0. \quad (2.102)$$

Из первого уравнения находим

$$\int \frac{dR(t)}{R(t)} = - \int ak^2 t, \quad \ln R(t) = -ak^2 t + \ln C_1,$$

где C_1 – произвольная постоянная.

$$\ln \frac{R(t)}{C_1} = -ak^2 t; \quad R(t) = C_1 \exp(-ak^2 t). \quad (2.103)$$

Уравнение (2.102) – однородное линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение, отвечающее уравнению (2.102), имеет вид

$$r^2 + k^2 = 0; \quad r_{1,2} = \pm ki.$$

Общее решение уравнения можно записать следующим образом:

$$\Phi(x) = C_2 \cdot \sin(kx) + C_3 \cdot \cos(kx),$$

где C_2 и C_3 – произвольные постоянные.

Таким образом, общее решение уравнения (2.96) имеет вид

$$\begin{aligned} \theta(x, t) &= C_1 \cdot \exp(-ak^2 t) (C_2 \cdot \sin(kx) + C_3 \cdot \cos(kx)) = \\ &= \exp(-ak^2 t) (C \cdot \sin(kx) + D \cdot \cos(kx)), \end{aligned} \quad (2.104)$$

где $C = C_1 \cdot C_2$; $D = C_1 \cdot C_3$.

В силу симметричности температурной кривой $T(x, t)$ относительно оси ординат (см. рис. 2.16) функция $\theta(x, t)$ четная, т.е. $\theta(-x, t) = \theta(x, t)$. Поэтому в выражении для $\theta(x, t)$ (2.104) нечетная функция $\sin(kx)$ должна отсутствовать, т.е. $C = 0$. С учетом этого решение (2.104) принимает вид

$$\theta(x, t) = D \cdot \exp(-ak^2 t) \cdot \cos(kx). \quad (2.105)$$

Для определения постоянных D и k используем граничные условия (2.97), (2.98) и начальное условие (2.99). В соответствии с уравнением (2.98)

$$\lambda \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x=R} = -a \theta(R, t). \quad (2.106)$$

С учетом выражения (2.105) для $\theta(x, t)$ находим

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x=R} = -Dk \cdot \exp(-ak^2 t) \cdot \sin(kR),$$

$$\theta(R, t) = D \cdot \exp(-ak^2 t) \cdot \cos(kR).$$

Подставив эти выражения в уравнение (2.106), получим

$$-\lambda Dk \cdot \exp(-ak^2 t) \cdot \sin(kR) = -Da \cdot \exp(-ak^2 t) \cdot \cos(kR).$$

После упрощения имеем

$$\operatorname{ctg}(kR) = k\lambda/a. \quad (2.107)$$

Умножим в правой части числитель и знаменатель на R и преобразуем уравнение (2.107): $\operatorname{ctg}(kR) = \frac{kR}{a \frac{R}{\lambda}}$, или $\operatorname{ctg}(kR) = \frac{kR}{Bi}$, где $Bi = \frac{aR}{\lambda}$ –

критерий Био, физический смысл которого рассмотрим ниже. Примем обозначение $\mu = kR$, с учетом которого получим

$$\operatorname{ctg} \mu = \frac{\mu}{Bi}. \quad (2.108)$$

Решив это трансцендентное уравнение, найдем постоянную μ и $k = \mu/R$. Проиллюстрируем графический метод решения уравнения (2.108).

Уравнение (2.108) можно представить в виде $y_1 = y_2$, где $y_1 = \operatorname{ctg} \mu$ и $y_2 = \frac{\mu}{Bi}$. Корнями уравнения будут точки пересечения кривых y_1 и y_2 . На рис. 2.19 приведены графики функций $y_1(\mu)$ и $y_2(\mu)$. Видно, что уравнение (2.108) имеет бесчисленное множество значений постоянной $k_n = \frac{\mu_n}{R}$.

Так как угол наклона прямой y_2 на графике равен $\arctg(\frac{1}{Bi})$, то $\mu_n = f Bi$. Подставив в формулу (2.105) любое из значений k_n , получим бесчисленное множество частных решений. Известно, что общее решение линейного уравнения равно сумме его частных решений, т.е.

$$\theta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \exp\left(-\frac{\mu_n^2 \cdot at}{R^2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\mu_n^2 x}{R}\right). \quad (2.109)$$

Безразмерное выражение $Fo = at/R^2$, играющее роль безразмерного времени, называют критерием Фурье.

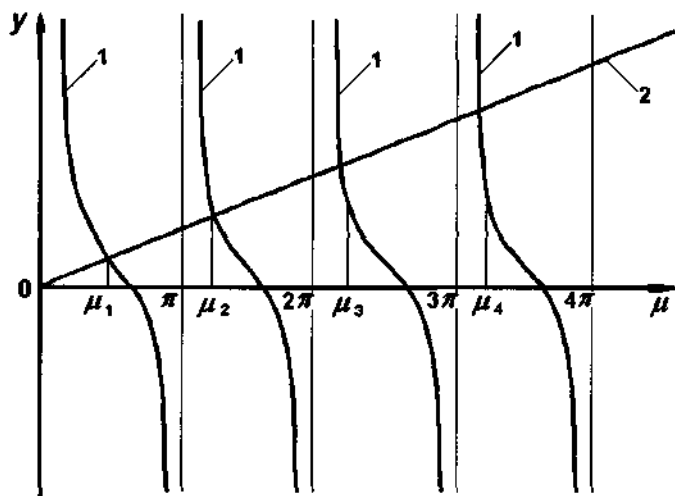


Рис. 2.19. Графическое решение уравнения (2.108):

1 – кривая $y_1 = \text{ctg} \mu$; 2 – прямая $y_2 = \mu/Bi$

Для определения постоянных C_n используем начальное условие (2.99). Подставив в уравнение (2.109) $t=0$ и $\theta=1$, получим

$$= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \cos\left(\frac{\mu_n x}{R}\right). \text{ Умножим обе части выражения на } \cos\left(\frac{\mu_m x}{R}\right) dx \text{ и}$$

проинтегрируем в пределах от $-R$ до R :

$$\int_{-R}^R \cos\left(\frac{\mu_m x}{R}\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_{-R}^R \cos\left(\frac{\mu_n x}{R}\right) \cdot \cos\left(\frac{\mu_m x}{R}\right) dx. \quad (2.110)$$

При всех m , кроме $m=n$, $\int_{-R}^R \cos\left(\frac{\mu_n x}{R}\right) \cdot \cos\left(\frac{\mu_m x}{R}\right) dx = 0$ (доказатель-

ство этого утверждения опускается). Поэтому уравнение (2.110) можно записать в виде

$$\int_{-R}^R \cos\left(\frac{\mu_m x}{R}\right) dx = C_n \int_{-R}^R \cos^2\left(\frac{\mu_n x}{R}\right) dx.$$

$$\int_{-R}^R \cos\left(\frac{\mu_m x}{R}\right) dx = \frac{R}{\mu_n} \cdot \sin\left(\frac{\mu_n x}{R}\right) \Big|_{-R}^{+R} = \frac{R}{\mu_n} (\sin \mu_n + \sin \mu_n) = \frac{2R}{\mu_n} \sin \mu_n.$$

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R \cos^2\left(\frac{\mu_n x}{R}\right) dx &= \int_{-R}^R \frac{1 + \cos(2\mu_n x / R)}{2} \cdot dx = \frac{x}{2} \Big|_{-R}^R + \frac{R}{4\mu_n} \cdot \sin\left(\frac{2\mu_n x}{R}\right) \Big|_{-R}^R = \\ &= R + \frac{R}{2\mu_n} \cdot \sin 2\mu_n = \frac{R}{\mu_n} (\mu_n + \sin \mu_n \cdot \cos \mu_n). \end{aligned}$$

Подставив выражения для рассмотренных интегралов в уравнение (2.110), получим

$$\frac{2R}{\mu_n} \cdot \sin \mu_n = C_n \frac{R}{\mu_n} (\mu_n + \sin \mu_n \cdot \cos \mu_n).$$

Отсюда находим

$$C_n = \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cdot \cos \mu_n}. \quad (2.111)$$

С учетом выражения (2.111) формула (2.109) принимает вид

$$\theta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cdot \cos \mu_n} \cdot \cos\left(\frac{\mu_n x}{R}\right) \cdot \exp(-\mu_n^2 \cdot Fo). \quad (2.112)$$

По формуле (2.112) можно рассчитать температуру в плите при любом значении x в любой момент времени. Однако вычисления по формуле (2.112) связаны с суммированием бесконечных рядов. Поэтому расчеты выполняют на ЭВМ и количество учитываемых членов ряда определяют в зависимости от требуемой точности. Номограмма, приведенная на рис. 2.18, построена в соответствии с решением уравнения (2.112) при $x=0$ и различных значениях Fo и Bi .

Критерий Bi можно привести к виду $Bi = (R/\lambda)/(1/\alpha)$. Очевидно, что в числителе фигурирует внутреннее термическое сопротивление плиты, а в знаменателе – внешнее сопротивление теплопередаче от плиты (R/λ) к среде. Критерий Био представляет собой отношение внутреннего термического сопротивления к внешнему. Его можно связать с отношением перепада температур в плите к разности температур поверхности плиты и среды.

На рис. 2.20 показано распределение температур при охлаждении плиты в стационарном режиме.

Исходя из граничного условия $\lambda \cdot \Delta T_1 / R = \alpha \Delta T_2$, или $Bi = \alpha R / \lambda = \Delta T_1 / \Delta T_2$.

Чем выше Bi , тем больше перепад температур по сечению тела. При достаточно малых значениях Bi можно пренебречь перепадом температур в теле по сравнению с перепадом температур в среде.

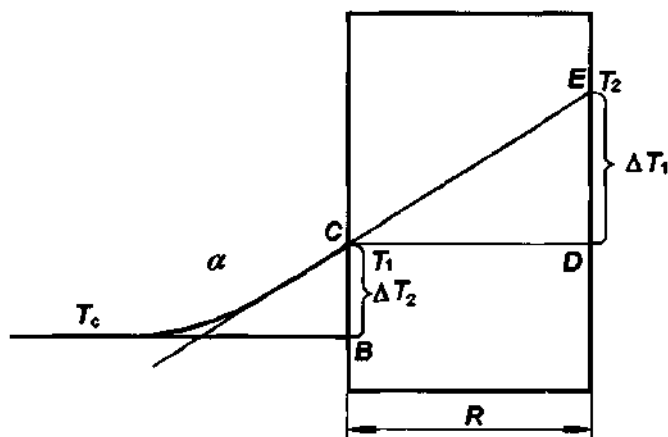


Рис. 2.20. Распределение температур при охлаждении плиты в стационарном режиме

При малых Bi ($Bi \rightarrow 0$) угол α на рис. 2.20 близок к $\pi/2$. Поэтому ряд корней μ_n близок к ряду $0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots, (n-1)\pi \dots$. При таких значениях μ_n значения C_n (формула (2.111)) равны нулю при всех n , кроме $n=1$. При $n=1$ имеем неопределенность типа $0/0$. Поэтому найдем

$$C_1 = \lim_{\mu_n \rightarrow 0} \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cdot \cos \mu_n} = \lim_{\mu_n \rightarrow 0} \frac{(2 \sin \mu_n) / \mu_n}{1 + (\sin \mu_n \cdot \cos \mu_n) / \mu_n} = 1.$$

С учетом полученных значений C_n формула (2.112) примет вид

$$\theta(x, t) = \cos\left(\frac{\mu_1 x}{R}\right) \cdot \exp(-\mu_1^2 \cdot Fo). \quad (2.113)$$

Оценим значение μ_1 при малых Bi ($Bi \rightarrow 0$). Так как при значениях μ_1 , близких к нулю, $\operatorname{tg} \mu_1 \approx \mu_1$ и $\operatorname{ctg} \mu_1 \approx 1/\mu_1$, уравнение (2.108) принимает вид

$$1/\mu_1 = \mu_1/Bi; \mu_1 = \sqrt{Bi}.$$

С учетом этого значения μ_1 из формулы (2.113) находим

$$\theta(x, t) = \cos(\sqrt{Bi} \cdot \frac{x}{R}) \cdot \exp(-Bi \cdot Fo) \approx \exp(-Bi \cdot Fo), \quad (2.114)$$

так как Bi близок к нулю.

Так как в решении (2.114) отсутствует переменная x , то при $Bi \rightarrow 0$ температура в плите в процессе ее охлаждения или нагрева распределена по толщине равномерно.

Рассмотрим противоположный случай: $\alpha \rightarrow \infty$ и $Bi \rightarrow \infty$. При $\alpha \rightarrow \infty$ температура на поверхности плиты становится равной температуре среды, т.е. $T(x=\pm R, t)=T_c$.

Найдем формулу для расчета температуры в плите в данном случае. Уравнение (2.106) при $Bi \rightarrow \infty$ ($Bi > 100$) принимает вид $\operatorname{ctg} \mu_n = 0$, т.е. прямая y_2 на рис. 2.19 совпадает с осью абсцисс. Отсюда получаем $\mu_n = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots, (2n-1)\frac{\pi}{2} \dots$. При этом $\cos \mu_n = 0$, а $\sin \mu_n = (-1)^{n+1}$.

По формуле (2.111) находим постоянную $C_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{\mu_n}$. С учетом данного выражения формула (2.109) принимает вид

$$\theta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{\mu_n} \cdot \cos(\mu_n \cdot \frac{x}{R}) \cdot \exp(-\mu_n^2 \cdot Fo). \quad (2.115)$$

В этом случае процесс теплопередачи лимитируется только внутренним термическим сопротивлением.

Отличительной особенностью формул (2.112) и (2.115) является то, что каждое последующее значение числа μ больше предыдущего, т.е. $\mu_{n+1} > \mu_n$. Так как μ_n стоит в отрицательном аргументе экспоненты в квадрате, то ряд быстро сходится, притом тем быстрее, чем больше время (Fo). Практически уже при $Fo > 0,3$ сумма ряда равна его первому члену ($n=1$), и решение принимает вид

$$\theta = \frac{2 \sin \mu_1}{\mu_1 + \sin \mu_1 \cdot \cos \mu_1} \cdot \cos\left(\mu_1 \cdot \frac{x}{R}\right) \cdot \exp(-\mu_1^2 \cdot Fo),$$

где μ_1 определяется зависимостью $\mu_1 = \mu_1(Bi)$. С увеличением Bi от нуля до бесконечности μ_1 возрастает от нуля до $\pi/2$, т.е. $0 \leq \mu_1 \leq \pi/2$.

При $Fo \geq 0,3$ температура изменяется во времени по закону простой экспоненты, а распределение температуры по объему тела и изменение ее во времени перестает зависеть от начальных условий. Такой режим теплопередачи называют *регулярным тепловым режимом*.

Приняв $\frac{2 \sin \mu_1}{\mu_1 + \sin \mu_1 \cdot \cos \mu_1} = C_1$ и прологарифмировав обе части выражения для θ , получим

$$\ln \theta = \ln\left(C_1 \cdot \cos\left(\mu_1 \frac{x}{R}\right)\right) - \mu_1^2 \cdot Fo; \quad \frac{\partial(\ln \theta)}{\partial Fo} = -\mu_1^2.$$

Последнее равенство говорит о том, что при регулярном режиме углы наклона кривой величины $\ln \theta$ к оси абсцисс (Fo) для всех точек тела одинаковы и не зависят от времени, так как $\frac{\partial(\ln \theta)}{\partial Fo} = \operatorname{tg} \gamma = -\mu_1^2$. Таким образом,

при регулярном режиме температурные кривые в координатах $\ln \theta - Fo$ для всех точек тела являются параллельными прямыми (рис. 2.21).

Время вступления в регулярный режим (Fo_1 на рис. 2.21) соответствует моменту, с которого начинает соблюдаться приведенное выше свойство температурного поля. Величина $m = \frac{\partial(\ln \theta)}{\partial t}$ представляет собой относительную скорость изменения температуры $\left(\frac{1}{\theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t}\right)$ и называется *тем-*

пом нагрева (охлаждения) тела. С ростом критерия Bi m возрастает.

Для неограниченной плиты выше получено, что

$$\frac{\partial(\ln \theta)}{\partial Fo} = \frac{\partial(\ln \theta)}{\partial t} \cdot \frac{1}{\partial Fo / \partial t} = \frac{\partial(\ln \theta)}{\partial t} \cdot \frac{1}{a / R^2} = -\mu_1^2.$$

Поэтому для неограниченной плиты $m = \frac{\partial(\ln \theta)}{\partial t} = -\frac{\mu_1^2 \cdot a}{R^2}$. При $Bi \rightarrow \infty$ и $Fo \geq 0,3$ сумма ряда (2.115) практически равна первому члену и

формула (2.115) принимает вид $\theta = \frac{4}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x}{R}\right) \cdot \exp\left(-\frac{\pi^2 Fo}{4}\right)$, так как

$$\mu_1 = \pi/2; \ln \theta = \ln\left(\frac{4}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x}{R}\right)\right) - \frac{\pi^2 a t}{4R^2}.$$

Таким образом, в данном случае в условиях регулярного режима $\ln \theta$ для всех точек плиты также линейно изменяется во времени при одинаковых угловых коэффициентах $m_\infty = \frac{\pi^2 a}{4R^2}$. Величину m_∞ называют *темпом охлаждения* при граничных условиях первого рода.

Из данной формулы видно, что величина m_∞ пропорциональна коэффициенту температуропроводности, т.е.

$$m_\infty = k a, \quad (2.116)$$

Для плоской пластины $k = \frac{\pi^2}{4R^2}$ для шара $k = \frac{1}{(\pi/R)^2}$ для параллелепипеда $k = \frac{1}{(\pi/l_1)^2 + (\pi/l_2)^2 + (\pi/l_3)^2}$, где l_1, l_2 и l_3 – длина ребер;

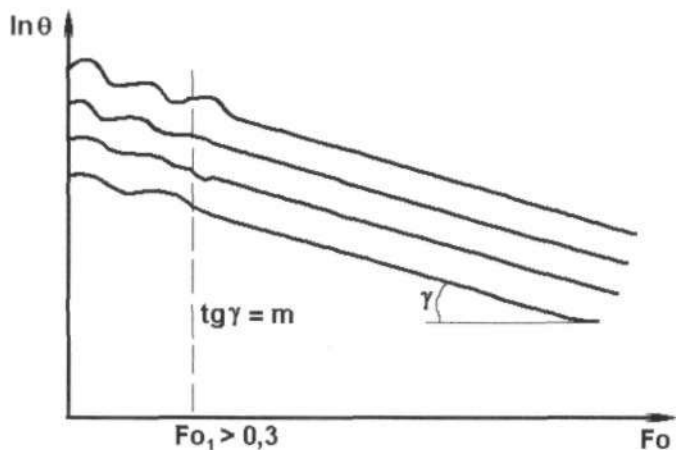


Рис. 2.21. Зависимость $\ln \theta (Fo)$

для цилиндра с радиусом R и длиной l $k = \frac{1}{(2,405/R)^2 + (\pi/l)^2}$.

Формула (2.116) используется для определения коэффициента температуропроводности материала на основе анализа температурных кривых охлаждения (нагрева) тела в условиях, когда $Bi \rightarrow \infty$ ($Bi > 1000$) при $Fo > 0,3$.

Построив на основе экспериментального измерения температур кривые охлаждения (нагрева) в координатах $\ln \theta - t$ (см. рис. 2.21), определяем по ним $\text{tg} \gamma = m_\infty$. Из формулы (2.116) находим $a = m_\infty / k$. При этом место измерения температуры не имеет значения, так как $\text{tg} \gamma$ в условиях регулярного режима не зависит от координат точек тела.

Рассмотренный тип регулярного режима называют *регулярным режимом первого рода*. При другом роде граничных условий реализуются иные типы регулярного режима.

На практике большое значение имеет решение, полученное для теплопередачи в полуограниченном стержне при граничном условии первого рода. Схема постановки задачи приведена на рис. 2.22.

Краевая задача включает в себя следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \infty; \quad (2.117)$$

$$T(x=0, t) = T_c; \quad (2.118)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=\infty} = 0; \quad (2.119)$$

$$T(x, t=0) = T_0, \quad T_0 > T_c. \quad (2.120)$$

Покажем, что уравнению (2.117) удовлетворяет решение

$$\theta(x, t) = \frac{T(x, t) - T_c}{T_0 - T_c} = A \cdot \text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) + B, \quad (2.121)$$

где $\text{erf}(U)$ – функция, равная известному из теории вероятностей интегралу

$$\text{Гаусса}; \quad \text{erf}(U) = \frac{2}{\pi} \int_0^U e^{-U^2} \cdot dU; \quad U = \frac{x}{2\sqrt{at}};$$

A и B – произвольные постоянные.

Найдем выражения для $\frac{\partial T}{\partial t}$ и $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ с использованием формулы (2.121):

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial t} &= A(T_0 - T_c) \cdot \frac{\partial(\operatorname{erf}(\frac{x}{2\sqrt{at}}))}{\partial t} = A(T_0 - T_c) \cdot \frac{\partial(\operatorname{erf}(U))}{\partial U} \cdot \frac{\partial U}{\partial t} = \\ &= A(T_0 - T_c) \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-U^2} \cdot (\frac{x}{2\sqrt{at}})' = -(T_0 - T_c) \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-(\frac{x}{2\sqrt{at}})^2} \cdot \frac{x}{4t \cdot \sqrt{at}} \cdot A, \\ \frac{\partial T}{\partial x} &= A(T_0 - T_c) \cdot \frac{\partial(\operatorname{erf}(U))}{\partial U} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} = A(T_0 - T_c) \cdot e^{-(\frac{x}{2\sqrt{at}})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{at}} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}}.\end{aligned}$$

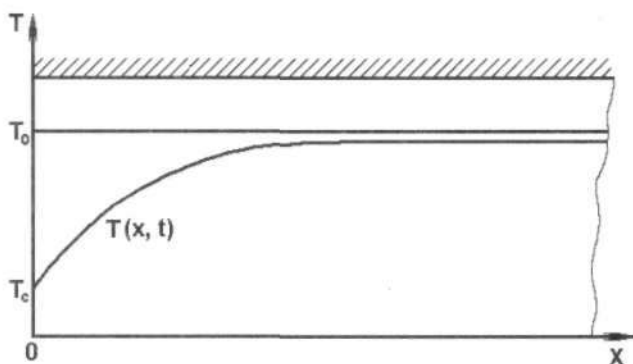


Рис. 2.22. Полуограниченный стержень при граничном условии первого рода

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= A(T_0 - T_c) \cdot \left(-\frac{2x}{(2\sqrt{at})^2}\right) \cdot e^{-\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{at}} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} = \\ &= -A(T_0 - T_c) \cdot e^{-\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)^2} \cdot \frac{x}{4t\sqrt{at}} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}};\end{aligned}$$

$$A \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -A(T_0 - T_c) \cdot e^{-\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)^2} \cdot \frac{x}{4t\sqrt{at}} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}}.$$

Сравнив последнее выражение с приведенным выше выражением для $\frac{\partial T}{\partial t}$, убеждаемся, что они совпадают, т.е. функция (2.121) удовлетворяет уравнению (2.117).

График функции $\operatorname{erf}(U)$ приведен на рис. 2.23. Для определения ее значений в справочной литературе приводятся соответствующие таблицы [11].

При $U=0$ и $U \rightarrow \infty$ $\operatorname{erf}(0)=0$, $\operatorname{erf}(\infty)=1$. Функция $1-\operatorname{erf}(U)=\operatorname{erfc}(U)$. Очевидно, что $\operatorname{erfc}(0)=1$ и $\operatorname{erfc}(\infty)=0$.

Найдем значения постоянных A и B , используя краевые условия (2.118)–(2.120):

$$\theta(0,t)=A \cdot \operatorname{erf}(0)+B \text{ или } \theta(0,t)=B=0,$$

так как

$$\theta(0,t) = \frac{T_c - T_c}{T_0 - T_c} = 0.$$

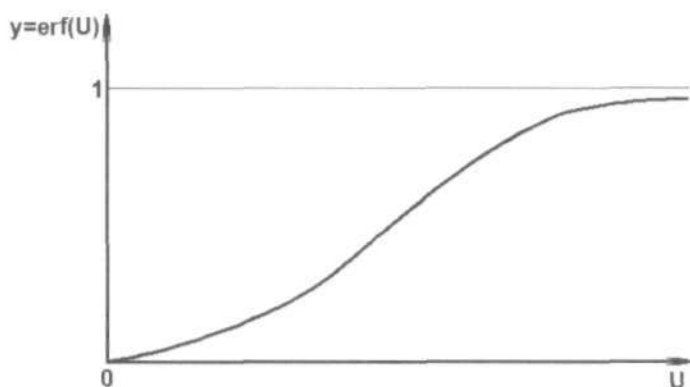


Рис. 2.23. График функции $\operatorname{erf}(U)$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x \rightarrow \infty} = (T_0 - T_c) \lim \left[A(T_0 - T_c) \cdot e^{-\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{at}} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \right] = 0,$$

т.е. условие (2.119) выполняется.

$$\theta(x, t=0) = A \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a \cdot 0}}\right) + B;$$

$$\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a \cdot 0}}\right) = \operatorname{erf} \infty = 1; \quad \theta(x, t=0) = A + B.$$

Так как $T(x, t=0) = T_0$, то $\theta = \frac{T(x, t=0) - T_c}{T_0 - T_c} = 1$. Поэтому $A+B=1$, или

$A=1$, так как $B=0$. С учетом этих значений A и B получаем решение данной краевой задачи:

$$\theta(x, t) = \frac{T(x, t) - T_c}{T_0 - T_c} = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right),$$

$$\text{или } T(x, t) - T_c = (T_0 - T_c) \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right).$$

$$T(x, t) = T_0 + T_c \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)\right) = T_0 - (T_0 - T_c) \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right). \quad (2.122)$$

Найдем выражение для расчета плотности теплового потока через левый торец стержня ($x=0$):

$$q = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0}.$$

С учетом выражения (2.122) получаем

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = -[(T_0 - T_c) \cdot e^{-\frac{x^2}{4at}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{at}}]_{x=0} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} = -(T_0 - T_c) \cdot \frac{1}{2\sqrt{at}} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}}.$$

$$q = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi at}} (T_0 - T_c). \quad (2.123)$$

Так как $a = \lambda / (c\rho)$ то $\lambda / \sqrt{a} = \lambda \sqrt{c\rho} / \sqrt{\lambda} = \sqrt{\lambda c\rho} = b$ где b – коэффициент аккумуляции тепла материалом тела, Вт·с^{1/2}/(м²·К). Физически b характеризует способность тела аккумулировать тепло при данной температуре.

Заменяя в формуле (2.123) $\lambda/\sqrt{a}$ на b , получаем

$$q = \frac{b}{\sqrt{\pi}} (T_0 - T_c). \quad (2.124)$$

Если по аналогии с конвективным теплообменом записать $q = \alpha(T_0 - T_c)$, то из выражения (2.124) можно вывести формулу для расчета коэффициента теплопередачи на границе стержня

$$\alpha = \frac{b}{\sqrt{\pi}}. \quad (2.125)$$

Характер изменения α со временем показан на рис. 2.24. Видно, что в начале процесса ($t=0$) $\alpha \rightarrow \infty$, а затем довольно быстро убывает и изменяется относительно мало.

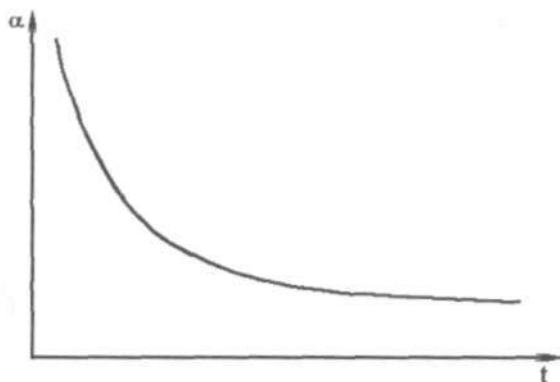


Рис. 2.24. Зависимость коэффициента теплопередачи α на границе полуограниченного стержня от времени

$$q = \frac{1}{S} \left(\frac{dQ}{dt} \right) = \frac{b}{\sqrt{\pi}} (T_0 - T_c);$$

$$\int_0^t dQ = \int_0^t \frac{bS}{\sqrt{\pi t}} \cdot (T_0 - T_c) dt;$$

$$Q = 2bS \cdot (T_0 - T_c) \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}. \quad (2.126)$$

Формула (2.126) позволяет рассчитать количество тепла, переданного через границу стержня с площадью S за время t . Из формулы видно, что величина Q , в данном случае пропорциональна квадратному корню из времени.

Формулы (2.124) и (2.126) широко используются в приближенных моделях затвердевания отливок.

В процессе затвердевания отливки имеет место контакт затвердевающего расплава с поверхностью формы. При этом в случае литья в песчаные формы контакт формы и отливки с достаточной точностью можно считать идеальным, т.е. теплообмен между отливкой и формой можно описать граничными условиями четвертого рода.

На рис. 2.25 показана схема двух контактирующих полуограниченных стержней, имевших до приведения в контакт ($t=0$) по всей длине температуры T_{c1} и T_{c2} .

Методика аналитического решения соответствующей краевой задачи достаточно сложна. Поэтому приведем окончательное решение [3].

$$T_1(x, t) = T_{c1} + (T_{c2} - T_{c1}) \cdot \frac{b_2}{b_1 + b_2} \cdot \operatorname{erfc} \frac{|x|}{2\sqrt{a_1 t}}; \quad (2.127)$$

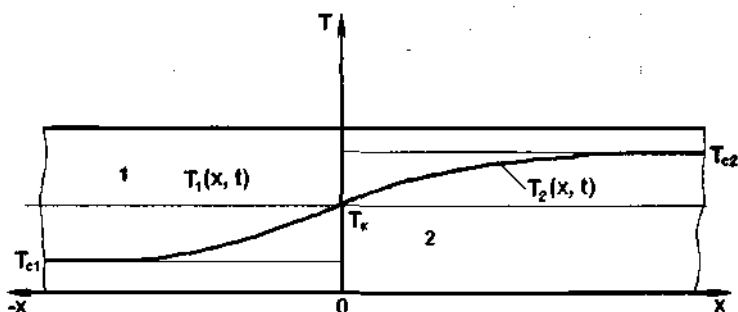


Рис. 2.25. Схема контактного теплообмена двух полуограниченных стержней

$$T_2(x, t) = T_{c2} - (T_{c2} - T_{c1}) \cdot \frac{b_1}{b_1 + b_2} \cdot \operatorname{erfc} \frac{|x|}{2\sqrt{a_2 t}}. \quad (2.128)$$

Приняв в этих выражениях $x=0$, выведем формулу для расчета температуры в месте контакта тел

$$T_K = T_1(0, t) = T_2(0, t) = -T_{c1} + (T_{c2} - T_{c1}) \cdot \frac{b_1}{b_1 + b_2}, \quad (2.129)$$

где $b_1 = \sqrt{\lambda_1 \cdot c_1 \cdot \rho_1}$ и $b_2 = \sqrt{\lambda_2 \cdot c_2 \cdot \rho_2}$ — коэффициенты аккумуляции тепла материалами стержней.

В момент приведения стержней в контакт в плоскости их соприкосновения мгновенно устанавливается соответствующая формуле (2.129) температура T_K , значение которой со временем не изменяется. В конце теплообмена температуры в обоих стержнях выравниваются: $T_1(x) = T_2(x) = T_K$.

Более соответствует реальным условиям схема теплообмена, приведенная на рис. 2.26.

Анализ решения, которое мы не приводим, показывает, что контактная температура T_K в данном случае является функцией времени, т.е. $T_K = T_K(t)$. В начальный момент времени ($t=0$) мгновенно устанавливается контактная температура

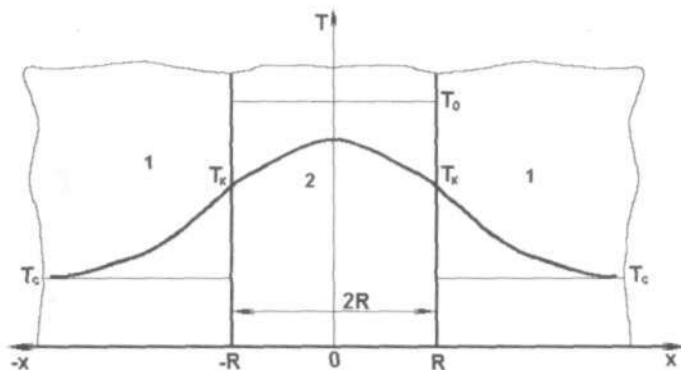


Рис. 2.26. Схема системы, состоящей из плоской плиты (2), помещенной в неограниченную среду (1), при граничных условиях четвертого рода

$$T_k(x = \pm R, t = 0) = T_c + (T_0 - T_c) \frac{b_2}{b_1 + b_2}. \quad (2.130)$$

В ходе теплообмена контактная температура T_k уменьшается.

Температура среды $T_1(x, t)$ сначала повышается, а затем, начиная с некоторого времени t^* , понижается. Время t^* по мере удаления от контактной поверхности, т.е. с ростом x , увеличивается. При $x=R$ $t^*=0$. Для иллюстрации на рис. 2.27 приведен характер температурных кривых для трех точек среды с разными значениями координаты x .

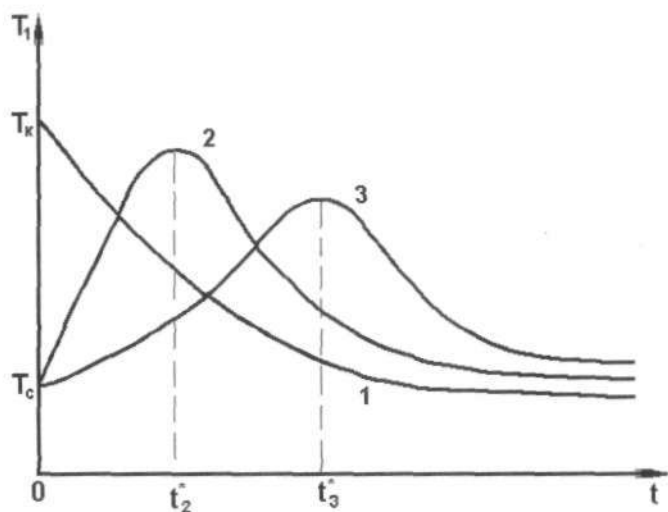


Рис. 2.27. Характер изменения температуры в среде со временем при: $x_1=0$ (1); $x_2>0$ (2); $x_3>x_2$ (3)

В отличие от рассмотренных примеров в процессе теплообмена между отливкой и формой в затвердевающем расплаве выделяется теплота кристаллизации, т.е. действует источник тепла. Это существенно усложняет задачу. Однако полученные в данной главе выводы используют при построении приближенных моделей затвердевания

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение вектора плотности теплового потока.
2. Что такое градиент температуры?
3. Сформулируйте закон Фурье для теплопередачи теплопроводностью.
4. Осуществляется ли передача вещества в процессе теплопередачи только теплопроводностью?
5. Опишите механизм теплопередачи теплопроводностью.
6. Как зависит от температуры коэффициент теплопроводности газов, жидкостей, твердых тел, металлов и капиллярно-пористых тел?
7. Опишите механизм теплопередачи конвекцией.
8. Что такое естественная и вынужденная конвекция?
9. Что такое плотность теплового потока при конвекции?
10. Поясните физический смысл коэффициента теплоотдачи α . Какова его размерность?
11. Как производится вычисление коэффициента теплоотдачи при свободной конвекции?
12. Поясните физический смысл критериев Грасгофа, Прандтля, Рейнольдса, Нуссельта и Пекле.
13. Поясните механизм теплопередачи излучением.
14. Сформулируйте закон Стефана–Больцмана.
15. Объясните, что такое плотность теплового потока при теплоизлучении от тела в неограниченную окружающую среду.
16. Объясните смысл уравнения теплопроводности Фурье для движущейся среды при теплофизических свойствах, зависящих от температуры.
17. Объясните смысл уравнения теплопроводности Фурье для тел классических конфигураций при симметричных условиях теплообмена.
18. Расскажите о краевых условиях в задачах теплопроводности.
19. Поясните смысл граничных условий первого, второго, третьего и четвертого родов.
20. Какова последовательность постановки краевых задач?
21. Поясните смысл формул для расчета коэффициента теплопередачи и теплового потока через одно- и многослойную плоскую стенку при стационарной теплопроводности при граничных условиях первого рода.
22. Поясните смысл формул для расчета коэффициента теплопередачи и теплового потока через одно- и многослойную плоскую стенку при стационарной теплопроводности при граничных условиях третьего рода.
23. Поясните смысл формул для расчета коэффициента теплопередачи и теплового потока через одно- и многослойную цилиндрическую стенку при стационарной теплопроводности при граничных условиях первого и третьего родов.

24. Что такое критическая толщина изоляции? Почему при увеличении толщины изоляции тепловые потери сначала возрастают, а затем уменьшаются?

25. Целесообразно ли применять теплоизоляционное покрытие на трубе с наружным диаметром $R_2=10$ см, если коэффициент теплопроводности изоляции $\lambda_{\text{и}}$ равен $0,001 \text{ Вт/(см}\cdot\text{К)}$ или $0,040 \text{ Вт/(см}\cdot\text{К)}$ при коэффициенте теплоотдачи к среде $\alpha=0,002 \text{ Вт/(см}^2\cdot\text{К)}$?

26. Напишите краевую задачу нестационарной теплопроводности для плиты при граничных условиях третьего и первого рода.

27. Напишите краевую задачу нестационарной теплопроводности для неограниченного цилиндра при граничных условиях третьего и первого родов.

28. Напишите краевую задачу теплопроводности для системы: неограниченная плита толщиной $2R$, помещенная в неограниченную среду.

29. Как рассчитать температуру контакта двух полуограниченных теплоизолированных с боков стержней, приведенных в идеальный тепловой контакт?

30. В чем смысл метода разделения переменных для решения дифференциального уравнения теплопроводности на примере неограниченной плиты при граничных условиях третьего рода?

31. Поясните физический смысл коэффициентов температуропроводности и аккумуляции тепла.

32. Поясните смысл критерия Био.

33. Объясните смысл формулы для расчета теплового потока с поверхности неограниченного стержня при граничных условиях первого рода.

34. Поясните формулу для расчета температурного поля в неограниченной плите при $Bi \rightarrow 0$.

35. Что такое регулярный режим?

36. Объясните метод экспериментального определения коэффициента температуропроводности в условиях регулярного режима.

37. Объясните смысл функций $\text{erf}(x)$, $\text{erfc}(x)$ и укажите их свойства.

38. Рассчитайте значения критериев Re , Nu , Pr , Pe и Fo . Условия расчетов приведены в табл. 2.2.

39. Определите толщину теплоизоляционного слоя δ_2 , позволяющего в два раза уменьшить потери тепла через стенку с толщиной δ_1 при условиях, приведенных в табл. 2.3. Вычислите тепловые потоки через стенку. В табл. 2.3 значения α_1 относятся к среде с температурой T_1 , а значения α_2 – к среде с температурой T_2 .

40. Определите потери тепла через двухслойную плоскую стенку в единицу времени на один квадратный метр ее поверхности при условиях, приведенных в табл. 2.4. Температура T_1 и коэффициент теплоотдачи α_1 от-

носятся к среде, находящейся с наружной поверхности стенки с толщиной δ_1 . Величины α_2 и T_2 относятся к среде, омывающей плиту с толщиной δ_2 .

Таблица 2.2

Исходные данные для выполнения задания 38

Номер вари- анта	v , см/с	R , см	λ , Вт/(см·К)	ν , см ² /с	a , см ² /с	α , Вт/(см ² ·К)	t , с
1	50	10	0,5	0,04	1,5	0,2	300
2	100	10	0,2	0,01	2,0	0,02	100
3	75	15	1,0	0,02	1,0	0,002	500
4	10	4	1,2	0,02	1,5	0,8	40
5	5	2	1,5	0,01	1,8	1,0	20
6	2	3	0,5	0,03	1,2	1,2	10
7	1	5	1,2	0,01	0,8	0,8	5
8	4	4	0,8	0,02	0,9	0,9	10

41. Найдите коэффициент теплопередачи и рассчитайте тепловой поток на единицу длины через трехслойную цилиндрическую стенку (рис. 2.28). Исходные данные приведены в табл. 2.5.

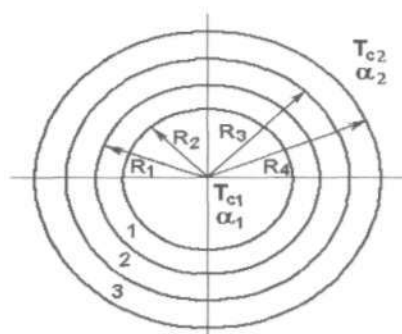


Рис. 2.28. Схема к заданию 41

42. Рассчитайте коэффициент теплопередачи α через зазор между отливкой и металлической формой. Толщина слоя краски $\delta_{кр}=0,02$ см; $\lambda_{кр}=0,005$ Вт/(см·К); толщина газового зазора $\delta_{газ}=0,00005$ см; теплопроводность воздушного зазора $\lambda_{возд}=0,001$ Вт/(см·К).

43. Рассчитайте время, необходимое для охлаждения плоской плиты толщиной δ с начальной температурой T_0 до температуры T_k на воздухе с температурой $T_c = \text{const}$ при $Bi \rightarrow 0$. Исходные данные приведены в табл. 2.6.

Указание: используйте решение для нестационарной теплопроводности плиты при $Bi \rightarrow 0$.

44. Определите время нагрева плиты толщиной δ от комнатной температуры ($T_0 = 20^\circ\text{C}$) до температуры T_k в печи с температурой T_c . Условия приведены в табл. 2.7.

Указание: используйте номограмму, приведенную на рис. 2.18.

45. Рассчитайте коэффициент теплоотдачи с наружной поверхности металлической формы высотой H_f с температурой T_n в среду с температурой $T_c = 20^\circ\text{C}$. Исходные данные приведены в табл. 2.8.

Таблица 2.3

Исходные данные для выполнения задания 39

Номер вари- анта	δ_1 , см	T_1 , $^\circ\text{C}$	T_2 , $^\circ\text{C}$	α_1 , $\text{Вт}/(\text{см}^2 \cdot \text{К})$	α_2 , $\text{Вт}/(\text{см}^2 \cdot \text{К})$	λ_1 , $\text{Вт}/(\text{см} \cdot \text{К})$	λ_2 , $\text{Вт}/(\text{см} \cdot \text{К})$
1	25	900	20	0,2	0,002	0,02	0,006
2	40	1000	100	0,3	0,004	0,03	0,008
3	60	1200	100	0,4	0,003	0,04	0,004
4	80	1000	100	0,6	0,002	0,05	0,005
5	100	900	20	0,4	0,003	0,06	0,004
6	120	1300	20	0,7	0,002	0,08	0,003
7	140	1300	100	0,7	0,002	0,10	0,004
8	160	1100	20	0,5	0,004	0,12	0,004
9	180	1100	100	0,5	0,003	0,12	0,004
10	200	1200	20	0,6	0,005	0,12	0,004

Таблица 2.4

Исходные данные для выполнения задания 40

Номер вари- анта	δ_1 , см	α_1 , $\text{Вт}/(\text{см}^2 \cdot \text{К})$	T_1 , $^\circ\text{C}$	λ_1 , $\text{Вт}/(\text{см} \cdot \text{К})$	δ_2 , см	α_2 , $\text{Вт}/(\text{см}^2 \cdot \text{К})$	T_2 , $^\circ\text{C}$	λ_2 , $\text{Вт}/(\text{см} \cdot \text{К})$
1	40	0,003	30	0,013	10	0,004	-30	0,010
2	50	0,005	20	0,020	10	0,002	-20	0,005
3	200	0,6	1200	0,12	50	0,005	20	0,004
4	100	0,4	900	0,06	20	0,003	20	0,004
5	140	0,7	1300	0,10	30	0,002	100	0,003
6	160	0,7	1100	0,12	40	0,002	20	0,004
7	180	0,5	1100	0,12	50	0,003	100	0,004
8	80	0,6	1000	0,05	20	0,002	100	0,005

Таблица 2.5

Исходные данные для выполнения задания 41

Номер варианта	Радиус цилиндра, см				λ , Вт/(см·К)			α , Вт/(см ² ·К)		T , °С	
	R_1	R_2	R_3	R_4	λ_1	λ_2	λ_3	α_1	α_2	T_{c1}	T_{c2}
1	15	20	25	30	0,5	0,2	0,1	0,08	0,002	100	20
2	25	30	35	40	0,5	0,2	0,1	0,08	0,002	200	20
3	30	35	40	45	0,6	0,3	0,2	0,10	0,005	300	20
4	15	20	25	30	0,8	0,2	0,1	0,10	0,002	250	50
5	40	45	55	60	0,8	0,3	0,1	0,12	0,004	400	20
6	25	35	40	45	0,6	0,3	0,2	0,10	0,005	300	20

Таблица 2.6

Исходные данные для выполнения задания 43

Номер варианта	δ , см	α , Вт/(см ² ·К)	Температура, °С			a , см ² /с	λ , Вт/(см·К)
			T_0	T_K	T_c		
1	30	0,003	900	560	20	1,34	0,63
2	40	0,004	900	560	20	1,34	0,63
3	50	0,005	900	560	20	1,34	0,63
4	60	0,006	950	560	20	1,34	0,63
5	70	0,005	950	560	20	1,34	0,63
6	80	0,006	1000	560	20	1,34	0,63
7	90	0,004	1100	560	20	1,34	0,63
8	100	0,007	1200	560	20	1,34	0,63

Таблица 2.7

Исходные данные для выполнения задания 44

Номер варианта	Температура, °С		α , Вт/(м ² ·К)	c , Дж/(кг·К)	ρ , кг/м ³	λ , Вт/(см·К)	δ , м
	T_K	T_c					
1	800	1200	1163	502,4	7700	40,7	0,10
2	1000	1400	1300	502,4	7700	40,7	0,20
3	5500	900	900	1200,0	2600	120,0	0,07
4	400	700	800	1200,0	2600	120,0	0,07

Таблица 2.8

Исходные данные для выполнения задания 45

№ варианта	Температура, °С		H_ϕ , см	$\lambda_{возд}$, Вт/(см·К)	$v_{возд}$, см ² /с	P_2	ε
	T_n	T_c					
1	300	20	40	0,0003	0,20	0,699	0,7
2	400	20	50	0,0003	0,20	0,699	0,7
3	500	20	40	0,0004	0,25	0,699	0,7
4	600	20	50	0,0004	0,25	0,699	0,7
5	800	20	40	0,0006	0,30	0,699	0,8
6	900	20	50	0,0006	0,30	0,699	0,8
7	1000	20	40	0,0008	0,35	0,699	0,8
8	1000	20	50	0,0008	0,35	0,699	0,8

Глава 2. ОСНОВЫ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ ОТЛИВОК

Теория затвердевания отливок является центральным разделом общей теории литейных процессов и наиболее сложной проблемой теплофизики процессов с фазовыми переходами первого рода, составляющей основную предмет литейной теплофизики.

Анализ и оптимизация формирования отливки немыслимы без применения расчетных методов описания кинетики ее затвердевания. Поэтому решению вопросов, связанных с затвердеванием сплавов в литейной форме, посвящено большое число работ отечественных и зарубежных исследователей. Все методы расчета кинетики затвердевания отливки можно разделить на аналитические и численные.

Аналитическое исследование затвердевания связано с решением нелинейных задач теплопроводности. Нелинейность математической постановки задач затвердевания обуславливается не только зависимостью теплофизических свойств сплава от температуры, но и сложным граничным условием на границе раздела жидкой и затвердевающей фаз, а также тем, что закон перемещения этой границы по объему отливки заранее не известен.

Методы классической теплопроводности, которые были рассмотрены в гл. 1, разработаны главным образом для линейных задач. Математические проблемы аналитической теории затвердевания в строгой постановке не решены до настоящего времени.

2.1. Анализ состояния теории затвердевания

Первые решения аналогичных задач по определению кинетики промерзания грунта были получены в XIX в. членами Российской академии наук О. Ляме, Б. Клапейроном и венским математиком Й. Стефаном. Задача, решенная ими, получила название задачи Стефана.

Сущность ее сводится к следующему. Полуограниченное пространство занято водой при температуре кристаллизации $T_{кр}$. В начальный момент времени ($t=0$) температура на поверхности воды мгновенно снижается до некоторой температуры $T_c < T_{кр}$, которая в дальнейшем поддерживается постоянной. Необходимо определить кинетику продвижения затвердевшей корки воды в глубь ее массива, т.е. функцию $\xi=\xi(t)$, где ξ – толщина затвердевшей корки. Расчетная схема задачи приведена на рис. 2.29.

При $t>0$ система представляет собой совокупность твердой корки (1) толщиной $\xi(t)$ и жидкой среды (2) при температуре $T(x, t)=T_{кр}$. В процессе затвердевания воды граница твердой и жидкой фаз перемещается по закону

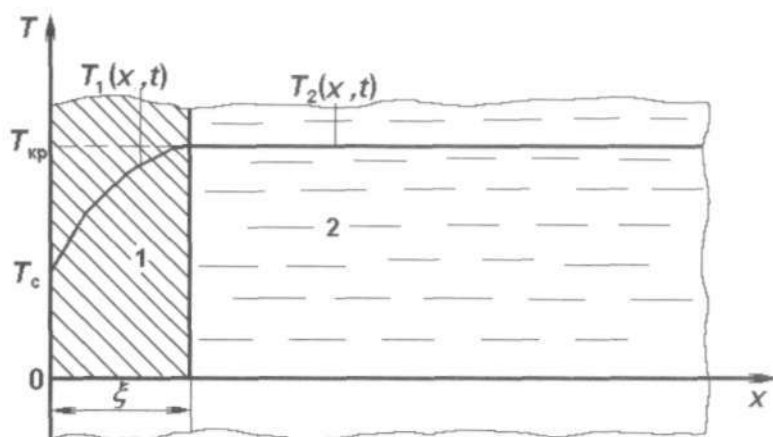


Рис. 2.29. Расчетная схема к задаче Стефана

$\xi = \xi(t)$. Теплопередача в твердой корке описывается уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \xi(t), \quad (2.131)$$

где $T_1(x, t)$ – температура в твердой корке;

a_1 – коэффициент температуропроводности льда.

Напишем граничные условия:

$$T_1(x=0, t) = T_c, \quad (2.132)$$

$$\lambda_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial x} \right)_{x=\xi} = L \rho \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad (2.133)$$

где λ_1 – коэффициент теплопроводности льда;

L – удельная теплота кристаллизации воды, Дж/кг;

ρ – плотность льда, кг/м³.

Уравнение (2.133) представляет собой частный случай граничного условия четвертого рода. Левая часть уравнения выражает плотность теплового потока, отводимого от фронта кристаллизации в твердую корку.

Так как в жидкой фазе градиент температур $\frac{\partial T_2}{\partial x} = 0$, то со стороны жидкости к фронту кристаллизации теплота не подводится.

Известно, что кристаллизация жидкостей сопровождается выделением тепла. Если при затвердевании 1 кг жидкости выделяется L Дж тепла, то при затвердевании слоя толщиной $d\xi$ за время dt выделится $L\rho d\xi$ Дж тепла на каждый квадратный метр фронта кристаллизации. Таким образом, количество теплоты кристаллизации, выделяющейся на фронте кристаллизации в единицу времени, равно $L\rho \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t}$, Вт/м².

Уравнение (2.133) является выражением теплового баланса на границе затвердевшей и жидкой фаз: плотность теплового потока через твердую корку равна поверхностной плотности источника тепла, действующего на границе и вызванного выделяющейся теплотой кристаллизации.

Для завершения постановки задачи необходимо для границы $x=\xi(t)$ написать еще одно граничное уравнение

$$T_1(x=\xi(t))=T_{kp}=\text{const.} \quad (2.134)$$

Система уравнений (2.133)–(2.134) представляет собой математическое описание задачи Стефана. Й. Стефану удалось подобрать функцию $T_1(x, t)$, удовлетворяющую всем условиям задачи.

$$T_1(x, t) = A + B \cdot \text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_1 t}}\right), \quad (2.135)$$

где A и B – постоянные коэффициенты, которые следует определить, исходя из граничных условий.

Выше было показано, что данная функция удовлетворяет уравнению (2.131). Из условия (2.132) имеем $T_1(x=0, t)=A+B \cdot \text{erf}(0)=T_c$, или $A=T_c$. С учетом условия (2.134) получаем

$$T_c + B \cdot \text{erf}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{a_1 t}}\right) = T_{kp} = \text{const.} \quad (2.136)$$

В уравнении (2.136) справа фигурирует постоянная величина. Поэтому выражение в левой части уравнения также не должно зависеть от

времени. Это возможно лишь в том случае, если аргумент $\frac{\xi}{2\sqrt{a_1 t}} = \text{const}$.

Чтобы исключить время из этого выражения, необходимо выполнение условия

$$\xi = m\sqrt{t}, \quad (2.137)$$

где m – некоторая постоянная величина, называемая константой затвердевания.

Выражение (2.137) является математической формулировкой закона квадратного корня, сущность которого сводится к тому, что толщина затвердевшей корки растет пропорционально корню квадратному из времени.

Для определения константы затвердевания m используем условие (2.133), выражения (2.135) и (2.137). Из формулы (2.136) с учетом выражения (2.137) находим $B = \frac{T_{кр} - T_c}{\text{erf}(\frac{m}{2\sqrt{a_1}})}$. С учетом этого формула (2.135) принимает вид

$$T_1(x, t) = T_c + \frac{T_{кр} - T_c}{\text{erf}(\frac{m}{2\sqrt{a_1}})} \cdot \text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_1 t}}\right). \quad (2.138)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T_1}{\partial x}\right)_{x=\xi} &= \frac{T_{кр} - T_c}{\text{erf}(\frac{m}{2\sqrt{a_1}})} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{a_1 t}}} e^{-U^2} \cdot dU\right)'_{x=\xi} = \\ &= \frac{2(T_{кр} - T_c)}{\sqrt{\pi} \cdot \text{erf}(\frac{m}{2\sqrt{a_1}})} \cdot \left(e^{-\frac{x^2}{4a_1 t}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{a_1 t}}\right)_{x=\xi} = \frac{T_{кр} - T_c}{\sqrt{\pi \cdot a_1 t} \cdot \text{erf}(\frac{m}{2\sqrt{a_1}})} \cdot e^{-\frac{m^2}{4a_1}}. \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{m}{2\sqrt{t}}.$$

С учетом выражений для $(\frac{\partial T_1}{\partial x})_{x=\xi}$ и $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ условие (2.133) принимает вид

$$\frac{\lambda_1(T_{кр} - T_c)}{\sqrt{\pi \cdot a_1 t} \cdot \operatorname{erf}(\frac{m}{2\sqrt{a_1}})} \cdot e^{-\frac{m^2}{4a_1}} = \frac{L\rho m}{2\sqrt{t}}. \quad \text{Учитывая, что}$$

$\frac{\lambda_1}{\sqrt{a_1}} = \sqrt{\lambda_1 c_1 \rho_1} = b_1$, получаем трансцендентное уравнение для определения константы затвердевания m .

$$\frac{b_1(T_{кр} - T_c)}{\sqrt{\pi} \cdot \operatorname{erf}(\frac{m}{2\sqrt{a_1}})} \cdot e^{-\frac{m^2}{4a_1}} = \frac{L\rho m}{2}. \quad (2.139)$$

Данное уравнение можно решить с применением одного из приближенных методов.

Й. Стефан проводил экспериментальное исследование процесса на Северном море и получил достаточное подтверждение адекватности выведенных формул.

За последние 100 лет решению аналогичных задач посвящено более 50 оригинальных работ. Применение метода Стефана для расчета кинетики затвердевания отливок было развито Н.И. Хвориновым, С. Шварцем, А.А. Фейдлом, М.Х. Ляйтфуттом, Б.Б. Гуляевым, Н.Г. Гиршовичем, Ю.А. Нехендзи и др. При этом особенно привлекательной является простота закона квадратного корня (2.137). Однако анализ экспериментальных данных по кинетике затвердевания реальных отливок показал ограниченность данного направления, так как оно не учитывает конфигурацию отливок, характер затвердевания сплавов и целый ряд специфических теплофизических условий затвердевания отливок.

Поэтому начиная с пятидесятых годов прошлого столетия развивается разработка методов расчета кинетики затвердевания отливок, основанных на приближенном описании процессов теплопередачи. Среди работ этого направления следует особо выделить исследования А.И. Вейника и Г.Ф. Баландина. Достоинство разработанных ими методов состоит в том, что они дают возможность получить относительно простые аналитические зависимости, позволяющие быстро выполнять необходимые расчеты для литья в песчаные и металлические формы для отливок из любых сплавов.

Однако упрощения, принимаемые при описании задачи, неизбежно приводят к ее искажению и погрешностям, которые априори трудно оценить.

Развитие вычислительной техники и методов прикладной математики привело к бурному прогрессу численных методов расчета кинетики затвердевания отливок.

Среди численных методов следует выделить методы конечных разностей (МКР), конечных элементов (МКЭ), граничных элементов (МГЭ), а также метод потоков. Сущность численных методов сводится к разбиению пространства, занятого отливкой и формой, на дискретные элементарные объемы и рассмотрению теплофизических уравнений для них и их границ в дискретном времени. Достоинство численных методов состоит в том, что они позволяют выполнить расчет с любой заданной точностью.

2.2. Аналитические методы расчета кинетики затвердевания

2.2.1. Физические представления о затвердевании сплавов

Литые заготовки, как правило, изготавливают из сплавов, которые в отличие от металлов затвердевают в интервале температур. Как известно из металловедения и физической химии, температура, при которой начинается затвердевание сплава, называется *температурой ликвидуса* T_L , а температура, при которой заканчивается затвердевание, – *температурой солидуса* T_C .

Разность температур $\Delta T_K = T_L - T_C$ определяет температурный интервал кристаллизации. По относительной величине $\frac{\Delta T_K}{T_C} \cdot 100\%$ сплавы разделяются на узко- и широкоинтервальные. Например, у алюминиевого сплава АК7ч

$\frac{\Delta T_K}{T_C} \cdot 100\% = \frac{610 - 577}{577} \cdot 100\% = 5,7\%$, а у сплава АЛ7–3Л

$\frac{\Delta T_K}{T_C} \cdot 100\% = \frac{635 - 465}{465} \cdot 100\% = 36,5\%$.

С точки зрения характера выделения теплоты кристаллизации при затвердевании сплава различают сплавы с эвтектическим превращением и сплавы типа твердых растворов. На рис. 2.30 приведена диаграмма состояния сплавов системы Al–Mg.

На диаграмме указаны два сплава: I – с концентрацией Mg $C_{o1} < C_a$ и II – с концентрацией Mg $C_a < C_{o2} < C_E$. Так как концентрация C_{o1} сплава I меньше предельной растворимости Mg в α -твердом растворе при температу-

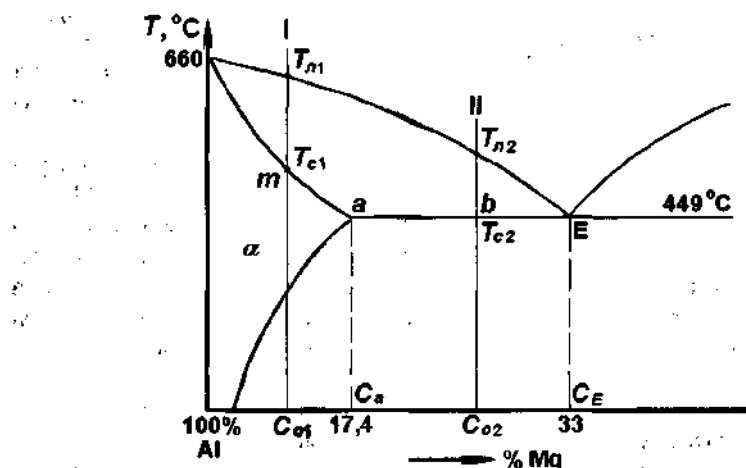


Рис. 2.30. Диаграмма состояния сплавов системы Al–Mg

ре солидуса, то эвтектическое превращение в этом сплаве в равновесных условиях отсутствует, т.е. данный сплав относится к сплавам типа твердых растворов.

В сплаве II имеет место эвтектическое превращение. При этом в соответствии с правилом рычага массовая доля сплава, затвердевающего в ин-

тервале температур $T_{L2}-T_{C2}$, равна отношению отрезков $\frac{bE}{aE}$. Массовая до-

ля, равная $\frac{ab}{aE}$, затвердевает при постоянной температуре T_{C2} , т.е. при температуре эвтектического превращения.

В сплавах типа твердых растворов вся теплота кристаллизации при затвердевании выделяется в интервале ликвидус–солидус. Различают интегральную и спектральную (дифференциальную) теплоту кристаллизации сплавов.

Под интегральной теплотой кристаллизации $Q_{кр}$ понимают теплоту, выделившуюся при затвердевании 1 кг сплава. Спектральная теплота кри-

сталлизации равна $r_{cn} = -\frac{dQ_{кр}}{dT}$. Она представляет собой теплоту, выделяющуюся при охлаждении 1 кг сплава в интервале кристаллизации на один градус.

Так как теплота кристаллизации выделяется в интервале ликвидус–солидус неравномерно, r_{cn} является функцией температуры, т.е. $r_{cn}=f(T)$. В

общем случае для сплавов типа твердых растворов интегральная теплота кристаллизации равна $Q_{кр} = \int_{T_A}^{T_c} r_{cn} \cdot dT$. В случае, если $r_{cn} = \text{const}$, получаем

$$r_{cn} = \frac{Q_{кр}}{T_A - T_c} = \frac{Q_{кр}}{\Delta T}. \text{ В первом приближении функцию } r_{cn} = f(T) \text{ можно}$$

определить по диаграмме состояния с использованием правила рычага.

На рис. 2.31 приведена упрощенная диаграмма состояния сплавов типа твердых растворов, на которой линии ликвидуса и солидуса приняты прямыми. При $T_c < T < T_A$ массовая доля выделившейся твердой фазы в соответствии с правилом рычага равна $\psi = \frac{bc}{ac}$.

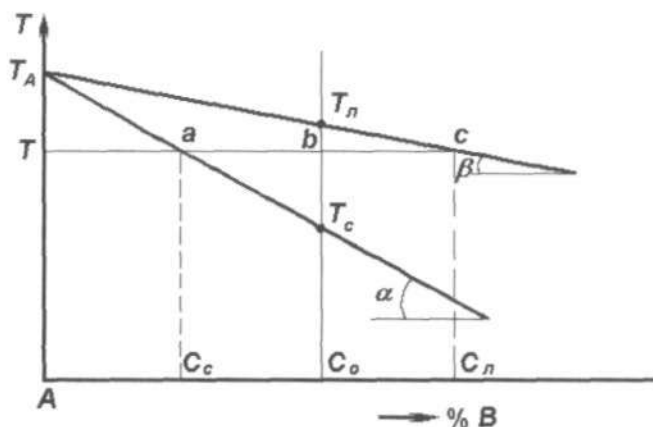


Рис. 2.31. Расчетная схема диаграммы состояния

Уравнение линии ликвидуса имеет вид $\frac{C_L}{C_o} = \frac{T - T_A}{T_x - T_A}$, или

$$C_L = C_o \frac{T - T_A}{T_x - T_A}, \text{ где } C_L - \text{концентрация жидкой фазы при температуре } T.$$

Для линии солидуса можно написать уравнение $C_c = C_o \frac{T_A - T}{T_A - T_c}$,

где C_c – концентрация твердой фазы при температуре T .

В соответствии с рис. 2.31

$$ac = C_A - C_c = C_o \left(\frac{T_A - T}{T_A - T_s} - \frac{T_A - T}{T_A - T_c} \right) = \frac{C_o (T_A - T)(T_s - T_c)}{(T_A - T_c)(T_A - T_s)};$$

$$bc = C_s - C_o = C_o \left(\frac{T_A - T}{T_A - T_s} - 1 \right) = \frac{C_o (T_s - T)}{T_A - T_s}.$$

С учетом выражений для ac и bc получаем

$$\psi = \frac{bc}{ac} = \frac{T_A - T_c}{T_s - T_c} \cdot \frac{T_s - T}{T_A - T}. \quad (2.140)$$

Дифференцируя ψ по T , найдем величину $\frac{d\psi}{dT}$, которую называют *темпом кристаллизации*:

$$\frac{d\psi}{dT} = - \frac{(T_A - T_c)(T_A - T_s)}{(T_s - T_c)(T_A - T)^2} = - \frac{D}{(T_A - T)^2},$$

где $D = - \frac{(T_A - T_c)(T_A - T_s)}{T_s - T_c}$ — постоянная величина для данной системы.

Если в первом приближении принять, что при кристаллизации 1 кг твердого раствора в интервале ликвидус—солидус выделяется теплота, равная удельной теплоте кристаллизации L (Дж/кг), то спектральную теплоту кристаллизации можно выразить формулой

$$r_{cn} = \frac{D \cdot L}{(T_A - T)^2}. \quad (2.141)$$

С учетом формулы (2.141) находим выражение для *интегральной теплоты кристаллизации*:

$$\begin{aligned} Q &= \int_{T_s}^{T_c} \frac{DL}{(T_A - T)^2} \cdot dT = \left[\frac{DL}{T_A - T} \right]_{T_c}^{T_s} = \\ &= DL \cdot \left(\frac{1}{T_A - T_s} - \frac{1}{T_A - T_c} \right) = \frac{D \cdot L (T_s - T_c)}{(T_A - T_s)(T_A - T_c)}. \end{aligned} \quad (2.142)$$

Зависимость (2.141) графически показана на рис. 2.32.

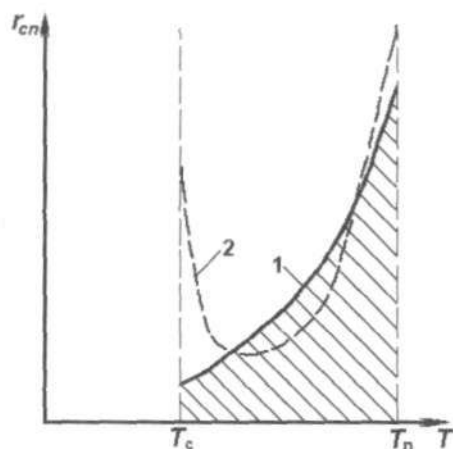


Рис. 2.32. Расчетная (1) и экспериментальная (2) зависимости $r_{сн}$ от температуры

Большой объем экспериментальных исследований функции $r_{сн}(T)$ для алюминиевых сплавов был выполнен А.И. Вейником. Характер экспериментальной функции $r_{сн}(T)$ показан на рис. 2.32 (кривая 2). Он отличается резким возрастанием $r_{сн}$ вблизи температуры ликвидуса и особенно вблизи температуры солидуса. Интегральная теплота кристаллизации сплава численно равна заштрихованной площади под кривой $r_{сн}(T)$.

Спектральная теплота кристаллизации имеет размерность удельной теплоемкости (Дж/(кг·К)). Выделяющаяся теплота кристаллизации замедляет охлаждение расплава, т.е. приводит к увеличению его теплоемкости. Эффективная теплоемкость сплава в интервале ликвидус–солидус равна

$$C_{эф} = C_{ж.т} + r_{сн}, \quad (2.143)$$

где $C_{ж.т}$ — физическая теплоемкость сплава в интервале ликвидус–солидус, которую в первом приближении можно выразить как среднюю между теплоемкостью сплава в твердом ($C_{тв}$) и жидком ($C_{ж}$) состояниях,

$$\text{т.е. } C_{ж.т} = \frac{C_{тв} + C_{ж}}{2}.$$

В отличие от сплавов чистые металлы кристаллизуются при постоянной температуре $T_{кр}$. Следовательно, теплота кристаллизации выделяется при фиксированной температуре и спектральная теплота кристаллизации металла $r_{сн} = \frac{dQ_{кр}}{dT} \rightarrow \infty$. Таким образом, при затвердевании металлов их эффективная теплоемкость равна бесконечности. Это обуславливает известный из физики факт, что пока при равномерном охлаждении весь объем металла не затвердеет, его температура остается постоянной и равной температуре кристаллизации (рис. 2.33).

На рис. 2.33 видно, что падение температуры начинается при $t=t_{затв}$, т.е. после полного затвердевания металла. Очевидно, что в условиях отвода тепла температура тела может оставаться неизменной лишь при бесконечной теплоемкости.

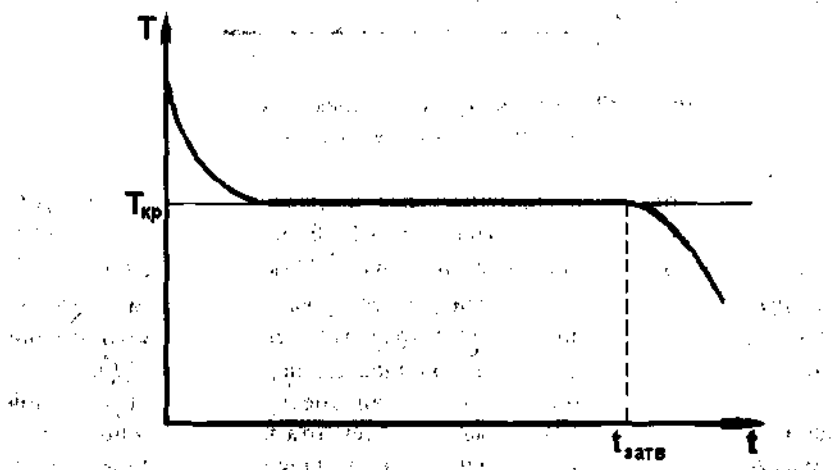


Рис. 2.33. Температурная кривая затвердевания чистого металла

В сплавах с эвтектическим превращением (см. рис. 2.30, сплав II) часть общей теплоты кристаллизации выделяется в интервале ликвидус–солидус, а другая часть Q_c – при эвтектическом превращении, т.е. $Q_{кр} = Q_{л.с} + Q_c$. Эффективная теплоемкость в интервале ликвидус–солидус при этом может быть вычислена по формуле (2.143), где величина $r_{сн}$ удовлетворяет уравнению $Q_{л.с} = \int_{T_c}^{T_D} r_{сн} \cdot dT$.

Так как теплота Q_c выделяется при фиксированной температуре эвтектического превращения T_c , то для сплавов, как и для чистых металлов, спектральная теплота $r_{cn.c}$ и эффективная теплоемкость при эвтектическом превращении равны бесконечности. Характер зависимости $r_{cn}(T)$ для сплавов с эвтектическим превращением показан на рис. 2.34.

При $T \rightarrow T_c$, как видно на рис. 2.34, $r_{cn} \rightarrow \infty$. Величина интегральной теплоты кристаллизации $Q_{кр}$ численно равна заштрихованной площади под кривой $r_{cn}(T)$.

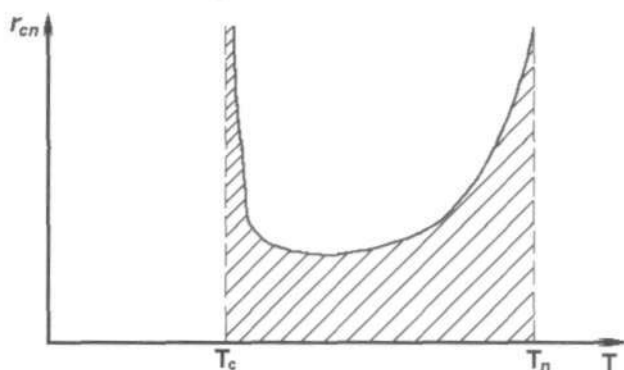


Рис. 2.34. Характер зависимости $r_{cn}(T)$ для сплавов с эвтектическим превращением

Введем функцию Кирхгофа

$$H = \int_0^T c(T) \cdot \rho(T) \cdot dT, \quad (2.144)$$

где $c(T)$ и $\rho(T)$ – удельная теплоемкость и плотность сплава как функции температуры.

Если в интервале температур ликвидус–солидус в формулу (2.144) вместо $c(T)$ подставить эффективную теплоемкость $c_{эфф}$, то функция Кирхгофа будет иметь смысл теплосодержания единицы объема сплава как функция температуры. Для иллюстрации приведем формулы для вычисления функции в широком интервале температур, приняв следующий вид зависимостей $c(T)$ и $\rho(T)$:

$$c(T) = c_{тв} = \text{const, если } T < T_c;$$

$$c(T) = c_{эфф} = c_{ж-т} + r_{сн}, \text{ если } T_c \leq T \leq T_d;$$

$$c(T) = c_{ж} = \text{const, если } T > T_d.$$

$$\rho(T) = \rho_{тв} = \text{const, если } T < T_c;$$

$$\rho(T) = \rho_{ж-т} = \frac{\rho_{тв} + \rho_{ж}}{2}, \text{ если } T_c \leq T \leq T_d;$$

$$\rho(T) = \rho_{ж} = \text{const, если } T > T_d,$$

где $c_{тв}$ и $c_{ж}$ – теплоемкость сплава в твердом и жидком состояниях;
 $\rho_{тв}$ и $\rho_{ж}$ – плотность сплава в твердом и жидком состояниях.

Зависимость $H(T)$ для сплавов типа твердых растворов

При $T < T_c$

$$H = \int_0^T c_{тв} \cdot \rho_{тв} \cdot dT = c_{тв} \cdot \rho_{тв} \cdot T. \quad (2.145)$$

При $T = T_c$

$$H = H_c = c_{тв} \cdot \rho_{тв} \cdot T_c. \quad (2.146)$$

При $T_c < T \leq T_d$

$$H = \int_0^{T_c} c_{тв} \cdot \rho_{тв} \cdot dT + \int_{T_c}^T \rho_{ж-т} (c_{ж-т} + r_{сн}) \cdot dT = c_{тв} \cdot \rho_{тв} \cdot T_c + \\ + c_{ж-т} \cdot \rho_{ж-т} (T - T_c) + \int_{T_c}^T \rho_{ж-т} \cdot r_{сн} \cdot dT. \quad (2.147)$$

Для простоты примем $r_{сн} = \frac{Q_{кр}}{T_d - T_c}$. Тогда

$$H = c_{тв} \cdot \rho_{тв} \cdot T_c + c_{ж-т} \cdot \rho_{ж-т} (T - T_c) + \frac{Q_{кр} (T - T_c) \cdot \rho_{ж-т}}{T_d - T_c}. \quad (2.148)$$

При $T = T_d$

$$H = H_d = c_{тв} \cdot \rho_{тв} \cdot T_c + c_{ж-т} \cdot \rho_{ж-т} (T_d - T_c) + Q_{кр} \rho_{ж-т}. \quad (2.149)$$

При $T > T_d$

$$H = \int_0^{T_c} c_{\text{тв}} \cdot \rho_{\text{тв}} \cdot dT + \int_{T_c}^{T_l} \rho_{\text{ж-т}} (c_{\text{ж-т}} + r_{\text{сн}}) dT + \int_{T_l}^T c_{\text{ж}} \cdot \rho_{\text{ж}} \cdot dT. \quad (2.150)$$

$$H = c_{\text{тв}} \rho_{\text{тв}} T_c + c_{\text{ж-т}} \rho_{\text{ж-т}} (T_l - T_c) + Q_{\text{кр}} \rho_{\text{ж-т}} + c_{\text{ж}} \rho_{\text{ж}} (T - T_l). \quad (2.151)$$

Графически зависимость $H(T)$ для сплавов типа твердых растворов показана на рис. 2.35, а.

Зависимость $H(T)$ для сплавов с эвтектическим превращением

При $T < T_c$

$$H = c_{\text{тв}} \rho_{\text{тв}} T. \quad (2.152)$$

При $T = T_c$ в единице объема сплава в процессе эвтектического превращения выделится теплота $Q_c \cdot \rho_{\text{тв}}$. На эту величину без изменения температуры при $T = T_c$ увеличится теплосодержание сплава:

$$H_{\text{сN}} = H_{\text{сK}} + Q_c \cdot \rho_{\text{тв}}, \quad (2.153)$$

$$\text{где } H_{\text{сK}} = c_{\text{тв}} \cdot \rho_{\text{тв}} \cdot T_c. \quad (2.154)$$

При $T_c < T \leq T_l$

$$H = H_{\text{сN}} + \int_{T_c}^T \rho_{\text{ж-т}} (c_{\text{ж-т}} + r_{\text{сн}}) \cdot dT. \quad (2.155)$$

Если принять $r_{\text{сн}} = \frac{Q_{\text{кр}}}{T_l - T_c}$, то

$$H = H_{\text{сN}} + c_{\text{ж-т}} \cdot \rho_{\text{ж-т}} (T - T_c) + \frac{Q_{\text{л.с}} (T - T_c) \cdot \rho_{\text{ж-т}}}{T_l - T_c}. \quad (2.156)$$

При $T = T_l$

$$H_l = H_{\text{сN}} + c_{\text{ж-т}} \cdot \rho_{\text{ж-т}} (T_l - T_c) + Q_{\text{л.с}} \cdot \rho_{\text{ж-т}}. \quad (2.157)$$

При $T > T_l$

$$H = H_l + \int_{T_l}^T c_{\text{ж}} \cdot \rho_{\text{ж}} dT = H_l + c_{\text{ж}} \cdot \rho_{\text{ж}} (T - T_l). \quad (2.158)$$

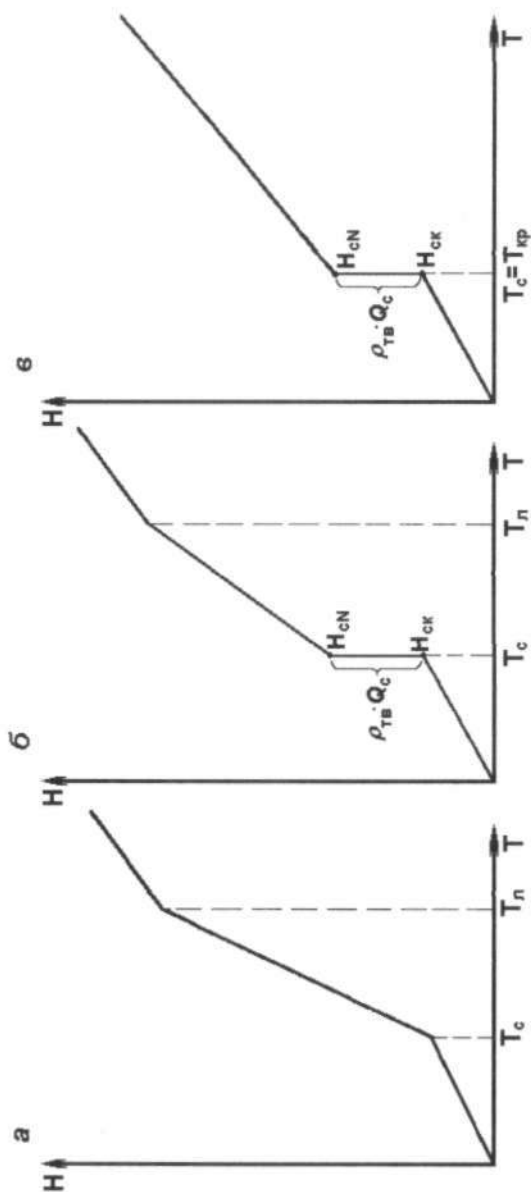


Рис. 2.35. Характер зависимости $H(T)$ для сплавов:

a – типа твердых растворов; $б$ – с эвтектическим превращением; $в$ – эвтектических и чистых металлов

Графически зависимость $H(T)$ для сплавов с эвтектическим превращением показана на рис. 2.35, б.

Для сплавов строго эвтектического состава ($C_0=C_E$) и чистых металлов $Q_{л.с}=0$, т.е. вся теплота кристаллизации выделяется при фиксированной температуре $T_c=T_{кр}$.

При $T < T_{кр}=T_c$

$$H = c_{тв} \cdot \rho_{тв} \cdot T. \quad (2.159)$$

При $T=T_{кр}$

$$H_{cN} = H_{с.к} + \rho_{тв} \cdot Q_c,$$

где $H_{с.к} = c_{тв} \cdot \rho_{тв} \cdot T_{кр}$.

Для чистых металлов $Q_c=L$, где L – удельная теплота кристаллизации металла.

При $T > T_{кр}$

$$H = H_{cN} + c_{ж} \rho_{ж} (T - T_{кр}). \quad (2.160)$$

Графически зависимость $H(T)$ для эвтектических сплавов и чистых металлов показана на рис. 2.35, в. На рис. 2.35, б и в видно, что теплосодержание сплавов с эвтектическим превращением и чистых металлов при температуре T_c или $T_{кр}$ скачкообразно без изменения температуры увеличивается на величину $\Delta H_c = H_{cN} - H_{с.к} = \rho_{тв} \cdot Q_c$.

В зависимости от условий охлаждения по сечению отливки имеет место более или менее значительный перепад температур (рис. 2.36). Во всех точках сечения отливки, где $T < T_c$, затвердевание закончено и имеет место затвердевшая корка сплава. При $T_c < T \leq T_d$ существует двухфазная жидко-твердая зона. В центре отливки при $T > T_d$ еще сохраняется зона жидкого сплава.

Таким образом, в общем случае в сечении отливки сосуществуют три зоны: затвердевшая корка, жидко-твердая и жидкая зоны. Границу твердой и жидко-твердой зон ($x=x_c$) называют *фронтом солидуса*, а границу жидко-твердой и жидкой зон ($x=x_d$) – *фронтом ликвидуса*. При этом $x_c=x_c(f)$ и $x_d=x_d(f)$. В процессе затвердевания отливки фронты ликвидуса и солидуса перемещаются к центру отливки. Сначала центра отливки достигают фронты ликвидуса. Этому моменту t_d соответствует снятие перегрева

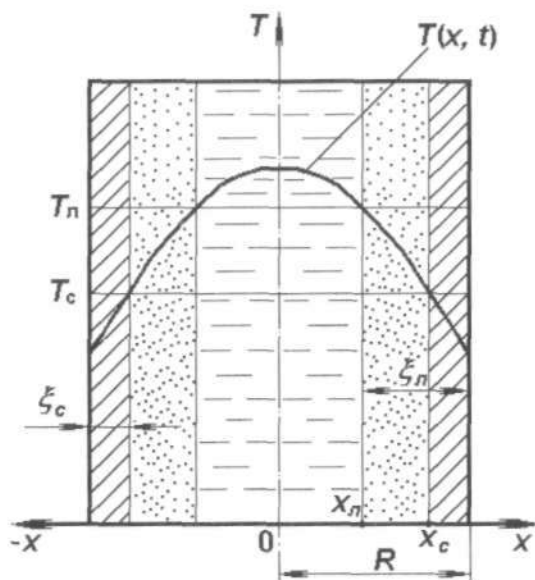


Рис. 2.36. Распределение температуры и фазовых зон по сечению отливки в некоторый момент времени t

сплава по всему сечению отливки. В момент смыкания фронтов солидуса $t_{затв}$ происходит полное затвердевание отливки. Графики функций $\xi_{lc}(t) = \frac{\xi_c}{R}$ и $\xi_{lc}(t) = \frac{\xi_n}{R}$ называют кинетическими кривыми затвердевания. На рис. 2.37 показан пример кинетических кривых затвердевания сплава.

При затвердевании чистых металлов и эвтектических сплавов в сечении отливки сосуществуют две зоны: зоны жидкого и затвердевающего сплава. Граница между этими зонами называется *фронтом затвердевания* (рис. 2.38).

На рис. 2.39 приведен график кинетической кривой затвердевания отливки из чистого металла.

В зависимости от ширины интервала кристаллизации и условий охлаждения сплава может быть реализован преимущественно последовательный или объемный характер затвердевания отливки.

В первом случае затвердевание осуществляется путем последовательного продвижения твердой корки в глубь расплава при наличии на

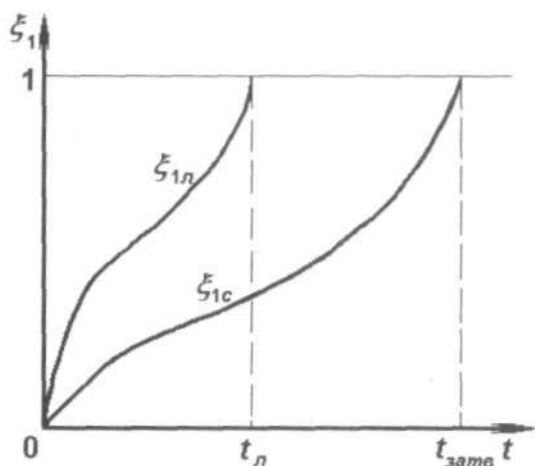


Рис. 2.37. Характер кинетических кривых продвижения фронтов ликвидуса ($\xi_{л}$) и солидуса ($\xi_{с}$) при затвердевании отливки

фронте кристаллизации узкой жидко-твердой зоны или ее отсутствии (см. рис. 2.38).

При преимущественно объемном затвердевании значительная часть

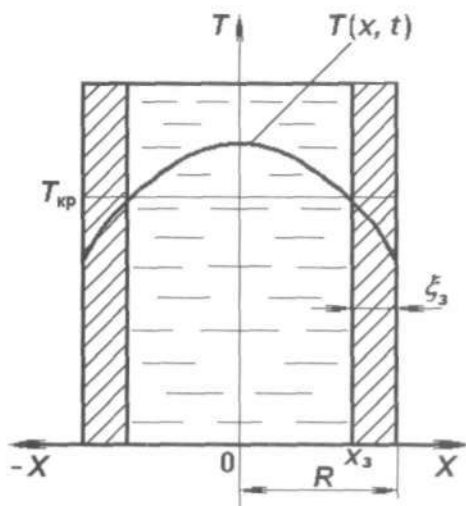


Рис. 2.38. Распределение температуры и фазовых зон в отливке из чистого металла или эвтектического сплава

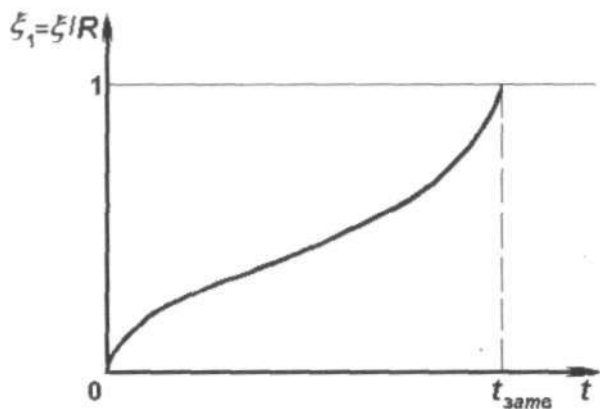


Рис. 2.39. Кинетическая кривая затвердевания отливки из чистого металла

поперечного сечения отливки занята двухфазной жидко-твердой зоной (см. рис. 2.37).

В качестве критерия характера затвердевания можно принять отношение

$$K_{x,z} = \frac{\xi_c(t=t_d)}{R},$$

где $\xi_c(t=t_d)$ – толщина корки сплава, затвердевшей на стенках формы в момент снятия перегрева на оси отливки;

R – половина толщины стенки отливки.

При $K_{x,z}=1$ реализуется чисто последовательное затвердевание отливки. Оно имеет место при затвердевании чистых металлов и эвтектических сплавов.

При $K_{x,z}=0$ реализуется чисто объемное затвердевание. На практике $0 < K_{x,z} < 1$. Например, при литье алюминиевых сплавов $K_{x,z}=0,05 \div 0,2$, а при стальном литье $K_{x,z}=0,5 \div 0,8$.

2.2.2. Математическая модель затвердевания отливок классических конфигураций

В процессе затвердевания отливки в теплообмене в общем случае участвует совокупность следующих тел с различными теплофизическими свойствами: жидкая (1), жидко-твердая (2) и затвердевшая (3) зоны отливки, а также литейная форма (4) и окружающая среда (рис. 2.40). Границы зон перемещаются внутрь отливки по некоторым априори неизвестным законам $r_s(t)$ и $r_c(t)$.

В соответствии с рис. 2.40 является естественным включение в математическую модель дифференциальных уравнений теплопроводности, написанных для участвующих в теплообмене тел, а также тепловых условий на их границах и соответствующих начальных условий.

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = a_1 \left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{k}{r} \cdot \frac{\partial T_1}{\partial r} \right), \quad 0 < r < r_s(t); \quad (2.161)$$

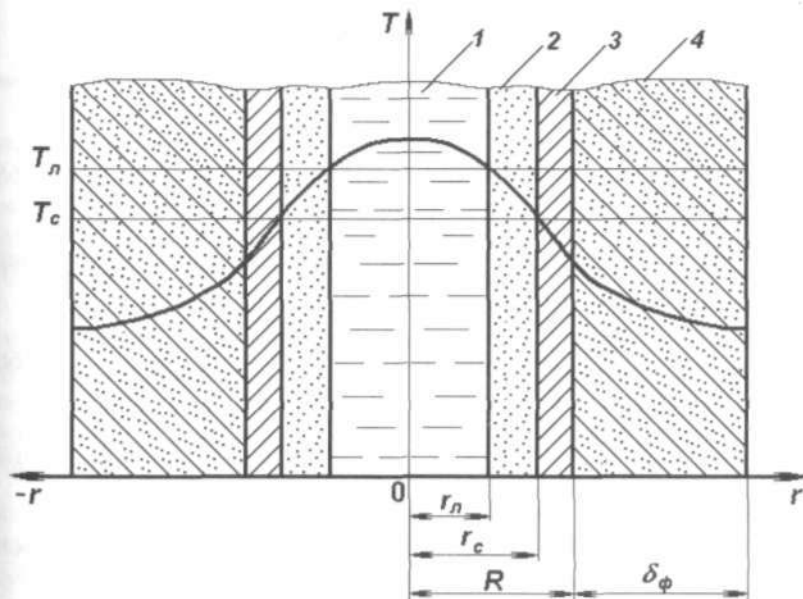


Рис. 2.40. Схема отливки, затвердевающей в песчаной форме

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = a_2 \left(\frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} + \frac{k}{r} \cdot \frac{\partial T_2}{\partial r} \right), \quad r_s(t) < r < r_c(t); \quad (2.162)$$

$$\frac{\partial T_3}{\partial t} = a_3 \left(\frac{\partial^2 T_3}{\partial r^2} + \frac{k}{r} \cdot \frac{\partial T_3}{\partial r} \right), \quad r_c(t) < r < R; \quad (2.163)$$

$$\frac{\partial T_4}{\partial t} = a_4 \left(\frac{\partial^2 T_4}{\partial r^2} + \frac{k}{r} \cdot \frac{\partial T_4}{\partial r} \right), \quad R < r < R + \delta_\phi; \quad (2.164)$$

где a_1, a_2, a_3, a_4 – коэффициенты температуропроводности соответствующих зон отливки и формы.

Коэффициент температуропроводности жидко-твердой зоны рассчитывается по формуле

$$\alpha_2 = \frac{\lambda_{ж-т}}{c_{эфф} \cdot \rho_{ж-т}},$$

где $\lambda_{ж-т}$ и $\rho_{ж-т}$ – теплопроводность и плотность сплава в интервале ликвидус–солидус;

$c_{эфф}$ – эффективная теплоемкость сплава как функция температуры.

В силу симметрии температурного поля в отливке граничное условие при $r=0$ имеет вид

$$\left(\frac{\partial T_1}{\partial r} \right)_{r=0} = 0. \quad (2.165)$$

На границах $r=r_s(t)$ и $r=r_c(t)$ имеют место граничные условия четвертого рода:

$$T_1(r=r_s, t) = T_2(r=r_s, t); \quad (2.166)$$

$$\lambda_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial r} \right)_{r=r_s} = \lambda_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial r} \right)_{r=r_s}; \quad (2.167)$$

$$T_2(r=r_c, t) = T_3(r=r_c, t); \quad (2.168)$$

$$\lambda_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial r} \right)_{r=r_c} = \lambda_3 \left(\frac{\partial T_3}{\partial r} \right)_{r=r_c}. \quad (2.169)$$

Для сплавов с эвтектическим превращением уравнение (2.169) имеет вид

$$\lambda_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial r} \right)_{r=r_c} = \lambda_3 \left(\frac{\partial T_3}{\partial r} \right)_{r=r_c} - Q_c \cdot \rho_3 \frac{dr_c}{dt}, \quad (2.170)$$

где член $Q_c \cdot \rho_3 \frac{dr_c}{dt}$, учитывает действие на данной границе источника тепла, вызванного выделением теплоты кристаллизации Q_c . В сплавах типа твердых растворов $Q_c=0$, и граничное условие выражается уравнением (2.169).

Формулировка граничного условия на границе между отливкой и формой ($r=R$) при литье в песчаные и металлические формы реализуется по-разному. При литье в песчаные формы имеет место достаточно плотный контакт поверхностей отливки и стенки формы, что позволяет тепловые условия на границе отливка – форма описывать граничными условиями четвертого рода

$$T_3(r=R, t) = T_4(r=R, t); \quad (2.171)$$

$$\lambda_3 \left(\frac{\partial T_3}{\partial r} \right)_{r=R} = \lambda_4 \left(\frac{\partial T_4}{\partial r} \right)_{r=R}. \quad (2.172)$$

При литье в металлические формы рабочая поверхность формы, как правило, покрывается слоем кокильной краски (толщина слоя $\delta_{кр}=0,1 \div 0,5$ мм). Кроме того, из-за неравномерного прогрева стенки металлической формы происходит ее коробление, приводящее к образованию газового зазора на границе отливки с формой. На рис. 2.41 показана конфигурация стенки формы в момент заливки ($t=0$) и в некоторые два последующих момента.

Перед заливкой формы ее стенки равномерно нагреты до некоторой температуры T_{40} . После заливки происходит прогрев формы со стороны ее внутренней поверхности, что приводит к неравномерному распределению температур по толщине стенки формы. Если бы слои формы не были связаны друг с другом, то они получили бы при этом различные температурные удлинения $\Delta l = l_\phi \cdot \alpha (T_4(r, t) - T_{40})$, где α – коэффициент термического расширения материала формы. Так как в стенке слои взаимосвязаны, то произойдет ее коробление вовнутрь полости формы (рис. 2.41, б). Вследствие теплоотвода от расплава в форму на ее поверхности сформируется корка затвердевшего сплава $\xi_{тв}$. В процессе прогрева формы произойдет выравнивание температур в стенке, и под действием упругих сил коробление снимется, т.е. стенка вернется в прежнее

положение (рис. 2.41, в). При этом между формой и твердой коркой сформируется газовый зазор.

Толщина газового зазора $\delta_{\text{газ}}$ неодинакова по поверхности отливки и изменяется со временем. Она зависит от многих факторов (жесткость и упругие свойства формы, ее конфигурация и размеры, теплофизические условия и т.п.) и трудно поддается расчетному определению.

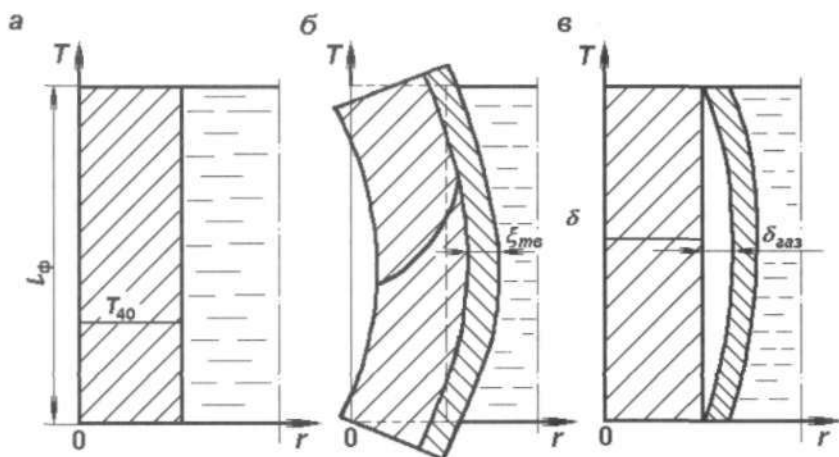


Рис. 2.41. Конфигурация стенки формы:
а – в момент заливки; б – при $t=t_1$; в – при $t=t_2 > t_1$

Таким образом, при литье в металлические формы поверхности отливок и формы разделены зазором, толщина которого равна сумме толщин кокильного покрытия и газового зазора, т.е. $\delta_{\text{газ}} = \delta_{\text{кр}} + \delta_{\text{газ}}$. Поэтому на данной границе имеет место граничное условие третьего рода

$$\lambda_3 \left(\frac{\partial T_3}{\partial r} \right)_{r=R} = -\alpha_1 (T_3(r=R) - T_4(r=R)), \quad (2.173)$$

$$\lambda_4 \left(\frac{\partial T_4}{\partial r} \right)_{r=R} = -\alpha_1 (T_3(r=R) - T_4(r=R)), \quad (2.174)$$

где α_1 – коэффициент теплопередачи через зазор,

$$\alpha_1 = \frac{1}{\frac{\delta_{кр}}{\lambda_{кр}} + \frac{\delta_{газ}}{\lambda_{газ}}}. \quad (2.175)$$

Хотя толщина газового зазора $\delta_{газ}$ очень мала (не более 10 мкм), он оказывает существенное влияние на интенсивность теплопередачи, так как теплопроводность газа $\lambda_{газ}$ значительно меньше теплопроводности кокильного покрытия.

На наружной поверхности формы происходит теплопередача в окружающую среду при граничных условиях третьего рода

$$\lambda_4 \left(\frac{\partial T_4}{\partial r} \right)_{r=R+\delta_\phi} = -\alpha_2 (T_4(r=R+\delta_\phi) - T_{cp}), \quad (2.176)$$

где α_2 – коэффициент теплоотдачи с наружной поверхности формы;

T_{cp} – температура окружающей среды.

Значение α_2 можно в первом приближении определить по формулам (2.12), (2.16) и (2.17). Начальные условия обычно задают в следующем виде:

$$T_1(r, t=0) = T_{10} \quad (0 \leq r \leq R); \quad (2.177)$$

$$T_4(r, t=0) = T_{40} \quad (R < r \leq R + \delta_\phi). \quad (2.178)$$

Математическая модель, описанная системой уравнений (2.164)–(2.178), в настоящее время не имеет аналитических решений даже для простейших условий. В приведенном виде она мало пригодна и для численной реализации на ЭВМ. Более экономичные расчетные численные схемы могут быть созданы на основе следующей модифицированной системы уравнений.

Если в широком интервале температур, охватывающем все состояния сплава от твердого до жидкого, теплофизические свойства сплава выразить соответствующими функциями температуры $C_1(T_1)$, $\rho_1(T_1)$, $\lambda_1(T_1)$, то теплопередачу во всей отливке можно описать общим для всех зон уравнением

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} \cdot C_1(T_1) \cdot \rho_1(T_1) = \frac{\partial(\lambda_1(T_1) \cdot \frac{\partial T_1}{\partial r})}{\partial r} + \frac{k}{r} \cdot \lambda_1(T_1) \cdot \frac{\partial T_1}{\partial r}. \quad (2.179)$$

Рассмотрим функцию Кирхгофа $H_1 = \int_0^{T_1} C_1(T) \cdot \rho_1(T) \cdot dT$ и функцию

Гудмена $U_1 = \int_0^{T_1} \lambda_1(T) dT$. Учитывая выражение (2.144), найдем $\frac{\partial H_1}{\partial t}$:

$$\frac{\partial H_1}{\partial t} = \frac{C_1(T) \cdot \rho_1(T) \cdot \partial T_1}{\partial T}.$$

Очевидно, что левая часть уравнения (2.179) равна $\frac{\partial H_1}{\partial t}$.

$$\frac{\partial U_1}{\partial r} = \lambda_1(T) \frac{\partial T_1}{\partial r} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 U_1}{\partial r^2} = \frac{\partial(\lambda_1(T) \frac{\partial T_1}{\partial r})}{\partial r}.$$

С учетом этих выражений уравнение (2.179) принимает вид

$$\frac{\partial H_1}{\partial t} = \frac{\partial^2 U_1}{\partial r^2} + \frac{k}{r} \cdot \frac{\partial U_1}{\partial r}, \quad 0 < r < R. \quad (2.180)$$

Аналогично введем для материала формы функции

$$H_2 = \int_0^{T_2} C_2(T_2) \cdot \rho_2(T_2) \cdot dT \quad \text{и} \quad U_2 = \int_0^{T_2} \lambda_2(T_2) \cdot dT,$$

где C_2, ρ_2 и λ_2 – теплоемкость, плотность и коэффициент теплопроводности форм как функции температуры T_2 .

Дифференциальное уравнение теплопроводности для формы в функциях H_2 и U_2 имеет вид

$$\frac{\partial H_2}{\partial t} = \frac{\partial^2 U_2}{\partial r^2} + \frac{k}{r} \cdot \frac{\partial U_2}{\partial r}, \quad R < r < R + \delta_\phi. \quad (2.181)$$

Таким образом, в рассматриваемой постановке можно выделить два участвующих в теплообмене тела: отливку и форму. В системе определены три границы: плоскость симметрии отливки ($r=0$), граница раздела отливки и формы ($r=R$) и наружная поверхность формы ($r=R+\delta_\phi$).

Граничные условия на указанных границах выражаются следующими уравнениями:

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial r}\right)_{r=0} = 0; \quad (2.182)$$

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial r}\right)_{r=R} = -\alpha_1(T_1(r=R) - T_2(r=R)); \quad (2.183)$$

$$\left(\frac{\partial U_2}{\partial r}\right)_{r=R} = -\alpha_1(T_1(r=R) - T_2(r=R)); \quad (2.184)$$

$$\left(\frac{\partial U_2}{\partial r}\right)_{r=R+\delta_\phi} = -\alpha_2(T_2(r=R+\delta_\phi) - T_{cp}). \quad (2.185)$$

Граничные условия (2.183) и (2.184) для границы отливка-форма ($r=R$) написаны для литья в металлические формы.

Как было сказано выше, при литье в песчаные формы условия теплообмена на границе отливка-форма достаточно точно описываются условиями четвертого рода. Поэтому вместо уравнений (2.183) и (2.184) в данном случае нужно использовать уравнения $T_1(r=R, t) = T_2(r=R, t)$;

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial r}\right)_{r=R} = \left(\frac{\partial U_2}{\partial r}\right)_{r=R}, \text{ или } \left(\frac{\partial U_1}{\partial r}\right)_{r=R} = \lambda_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial r}\right)_{r=R} \text{ при } \lambda_2 = \text{const.}$$

Для завершения модели напомним начальные условия:

$$T_1(r, t=0) = T_{10}; \quad H_1(r, t=0) = H_1(T_{10});$$

$$U_1(r, t=0) = U_1(T_{10}); \quad T_2(r, t=0) = T_{20};$$

$$H_2(r, t=0) = H_2(T_{20}); \quad U_2(r, t=0) = U_2(T_{20}).$$

К уравнениям (2.181)–(2.185) необходимо присоединить функции $H_1 = H_1(T_1)$; $U_1 = U_1(T_1)$; $H_2 = H_2(T_2)$ и $U_2 = U_2(T_2)$. Для вычисления функции $H_1 = H_1(T_1)$ можно использовать полученные выше формулы (2.145)–(2.158).

$$U_1(T_1) = \lambda_{ms} \cdot T_1, \text{ если } T_1 < T_c;$$

$$U_1(T_1) = \lambda_{ms} \cdot T_c + \lambda_{жс-м} (T - T_c), \text{ если } T_c \leq T_1 < T_d;$$

$$U_1(T_1) = \lambda_{ms} \cdot T_c + \lambda_{жс-м} (T_d - T_c) + \lambda_{жс} (T - T_d), \text{ если } T_1 \geq T_d, \quad (2.186)$$

где $\lambda_{тв}$, $\lambda_{ж-т}$ и $\lambda_{ж}$ – коэффициенты теплопроводности сплава в твердом, жидко-твердом и жидком состояниях.

Функции $H_2(T_2)$ и $U_2(T_2)$ можно определить, вычисляя интегралы

$$H_2 = \int_0^{T_2} C_2(T) \cdot \rho_2(T) \cdot dT \quad \text{и} \quad U_2 = \int_0^{T_2} \lambda_2(T) \cdot dT, \quad \text{приняв те или иные}$$

функции, выражающие зависимости $C_2(T)$, $\rho_2(T)$ и $\lambda_2(T)$ для данного материала формы. В простейшем случае можно пренебречь зависимостью теплофизических коэффициентов материала формы от температуры, т.е. принять $C_2(T)=C_2=\text{const}$; $\rho_2(T)=\rho_2=\text{const}$ и $\lambda_2(T)=\lambda_2=\text{const}$. При этом $H_2 = C_2 \cdot \rho_2 \cdot T$ и $U_2 = \lambda_2 \cdot T$.

Математическая модель (2.180)–(2.186) очень удобна для численной реализации на ЭВМ, методы которой рассмотрены в п. 2.3 данной главы.

2.2.3. Аналитические методы решения краевых задач затвердевания

Известные строгие аналитические решения приведенных математических моделей получены для отливок из чистых металлов при ряде ограничений, налагаемых на краевые условия теплообмена.

Решение С. Шварца

В 1931 г. немецкий исследователь С. Шварц получил решение задачи о затвердевании плоского полуограниченного слитка из чистого металла в полуограниченной форме при граничном условии четвертого рода, т.е. при наличии физически плотного контакта между отливкой и формой (рис. 2.42).

Математическое описание этой задачи сводится к следующей системе:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \xi; \quad (2.187)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}, \quad \xi < x < \infty; \quad (2.188)$$

$$\frac{\partial T_3}{\partial t} = a_3 \frac{\partial^2 T_3}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < 0; \quad (2.189)$$

$$\lambda_3 \left(\frac{\partial T_3}{\partial x} \right)_{x=0} = \lambda_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial x} \right)_{x=0}; \quad (2.190)$$

$$\left(\frac{\partial T_3}{\partial x} \right)_{x \rightarrow \infty} = 0; \quad (2.191)$$

$$\left(\frac{\partial T_2}{\partial x} \right)_{x=\infty} = 0; \quad (2.192)$$

$$T_3(x=0, t) = T_1(x=0, t); \quad (2.193)$$

$$\lambda_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial x} \right)_{x=\xi} = \lambda_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial x} \right)_{x=\xi} + L\rho \frac{d\xi}{dt}; \quad (2.194)$$

$$\xi = f(t); \quad T_1(x = \xi, t) = T_2(x = \xi, t) = T_{кр}; \quad (2.195)$$

$$T_3(x, t=0) = T_{30}; \quad T_2(x, t=0) = T_{20}.$$

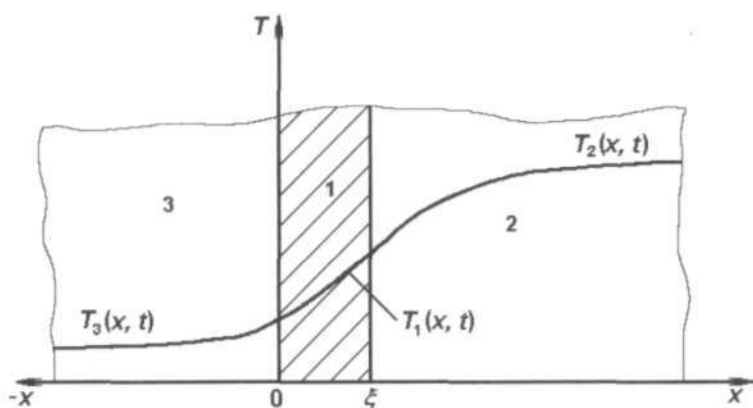


Рис. 2.42. Схема теплообмена затвердевшей корки (1), жидкого металла (2) и формы (3)

Поступая аналогично Й. Стефану, С. Шварц в качестве решения задачи принял функции вида

$$T_1 = A_1 + B_1 \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_1 t}}\right); \quad (2.196)$$

$$T_2 = A_2 + B_2 \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_2 t}}\right); \quad (2.197)$$

$$T_3 = A_3 + B_3 \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_3 t}}\right), \quad (2.198)$$

где $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ – постоянные коэффициенты, определяемые из граничных условий.

Функции (2.196)–(2.198) удовлетворяют уравнениям (2.187)–(2.189). Предлагаем читателю убедиться в этом самостоятельно.

$$\left(\frac{\partial T_3}{\partial x}\right)_{x=\infty} = (B_3 \cdot e^{-\frac{x^2}{4a_3 t}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{a_3 t}} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}})_{x=\infty} = 0.$$

$$\text{Аналогично } \left(\frac{\partial T_2}{\partial x}\right)_{x=\infty} = (B_2 \cdot e^{-\frac{x^2}{4a_2 t}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi a_2 t}})_{x=\infty} = 0.$$

Таким образом, граничные условия (2.191) и (2.192) выполняются при любых значениях коэффициентов A_2, A_3, B_2 и B_3 .

С учетом (2.196) и (2.198) уравнение (2.190) примет вид

$$\lambda_3 (B_3 \cdot e^{-\frac{x^2}{4a_3 t}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi a_3 t}})_{x=0} = \lambda_1 (B_1 \cdot e^{-\frac{x^2}{4a_1 t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot a_1 t}})_{x=0}.$$

или $\lambda_3 \frac{B_3}{\sqrt{a_3}} = \lambda_1 \frac{B_1}{\sqrt{a_1}}$. Так как $\frac{\lambda}{\sqrt{a}} = \sqrt{\lambda c \rho} = b$, то получаем

$$b_3 \cdot B_3 = b_1 \cdot B_1. \quad (2.199)$$

Поскольку $\operatorname{erf}(0)=0$, из выражения (2.193) находим

$$A_1 = A_3. \quad (2.200)$$

Условие (2.195) записываем в виде

$$A_1 + B_1 \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{a_1 t}}\right) = T_{кр}; \quad A_2 + B_2 \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{a_2 t}}\right) = T_{кр}.$$

Так как в правых частях данных выражений находится постоянная величина ($T_{кр}$), то и в левых частях не должно содержаться величины t . Это возможно лишь при $\xi = m\sqrt{t}$, где m – константа затвердевания. Подставив эту функцию вместо ξ , получаем

$$A_1 + B_1 \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{m}{2\sqrt{a_1 t}}\right) = T_{кр}; \quad (2.201)$$

$$A_2 + B_2 \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{m}{2\sqrt{a_2 t}}\right) = T_{кр}. \quad (2.202)$$

С учетом начальных условий имеем

$$A_3 - B_3 = T_{30} \quad \text{и} \quad A_2 + B_2 = T_{20}, \quad (2.203)$$

так как $\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)_{t \rightarrow 0} \rightarrow \operatorname{erf}(\infty) = 1$ и $\operatorname{erf}(-\infty) = -1$.

Решая систему уравнений (2.199)–(2.203), находим выражения для определения коэффициентов A_1 , A_2 , A_3 , B_1 , B_2 и B_3 (выполните это самостоятельно), с учетом которых функции (2.196)–(2.198) принимают вид

$$T_1 = T_{30} + \frac{(T_{кр} - T_{30}) \left(1 + \frac{b_3}{b_1} \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_1 t}}\right)\right)}{1 + \frac{b_3}{b_1} \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{m}{2\sqrt{a_1 t}}\right)}; \quad (2.204)$$

$$T_3 = T_{30} + \frac{(T_{кр} - T_{30}) \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{|x|}{2\sqrt{a_3 t}}\right)}{1 + \frac{b_3}{b_1} \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{m}{2\sqrt{a_1 t}}\right)}; \quad (2.205)$$

$$T_2 = T_{20} + \frac{(T_{кр} - T_{20}) \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_2 t}}\right)}{\operatorname{erfc}\left(\frac{m}{2\sqrt{a_2}}\right)}, \quad (2.206)$$

где $\operatorname{erfc}(U) = 1 - \operatorname{erf}(U)$.

Для определения константы затвердевания m используем граничное условие (2.194) с учетом функций (2.204)–(2.206):

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_1 (T_{кр} - T_{30}) \cdot b_3}{b_1 \left(1 + \frac{b_3}{b_1} \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{m}{2\sqrt{a_1}}\right)\right)} \cdot e^{-\frac{\xi^2}{4a_1 t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot a_1 t}} = \\ & = \frac{\lambda_2 (T_{20} - T_{кр})}{\operatorname{erfc}\left(\frac{m}{2\sqrt{a_2}}\right)} \cdot e^{-\frac{\xi^2}{2\sqrt{a_2 t}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot a_2 t}} + \frac{L \rho m}{2\sqrt{t}}. \end{aligned}$$

После преобразований получаем следующее трансцендентное уравнение для расчета m :

$$\frac{(T_{кр} - T_{30}) \cdot b_3}{1 + \frac{b_3}{b_1} \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{m}{2\sqrt{a_1}}\right)} \cdot e^{-\frac{m^2}{4a_1}} = \frac{(T_{20} - T_{кр}) \cdot b_2}{\operatorname{erfc}\left(\frac{m}{2\sqrt{a_2}}\right)} \cdot e^{-\frac{m^2}{4a_2}} + \frac{L \rho m \cdot \sqrt{\pi}}{2}. \quad (2.207)$$

Уравнение (2.207) решают одним из приближенных методов на ЭВМ.

Подставив в формулы (2.204) и (2.205) $x=0$, получим выражение для расчета температуры контакта отливки с формой

$$T_k = T_{30} + \frac{T_{кр} - T_{30}}{1 + \frac{b_3}{b_1} \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{m}{2\sqrt{a_1}}\right)}. \quad (2.208)$$

Из формулы (2.208) видно, что T_k в процессе затвердевания отливки не изменяется.

Формула (2.197) неприменима в случае, когда отливка имеет конечную толщину, так как при этом граничное условие в центре отливки ($x=R$, где R – половина толщины отливки) не выполняется, т.е. $(\frac{\partial T_2}{\partial x})_{x=R} = 0$.

Действительно, эта производная при любом значении B_2 и $t > 0$ не равна нулю.

$$(\frac{\partial T_2}{\partial x})_{x=R} = B_2 \cdot e^{-\frac{x^2}{4a_2 t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot a_2 t}} \Big|_{x=R} = B_2 \cdot e^{-\frac{R^2}{4a_2 t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot a_2 t}}.$$

Вместе с тем простота и удобство применения формулы $\xi = m\sqrt{t}$ (закон квадратного корня) породили многочисленные попытки путем различных уточнений распространить ее на реальные отливки. Одним из широко известных методов анализа кинетики затвердевания отливок, основанных на законе квадратного корня, является метод Н.И. Хворина.

Метод Н.И. Хворина

Рассмотрим плоскую отливку толщиной $2R$, затвердевающую в неограниченной среде при граничных условиях четвертого рода на границе отливки с формой. Отливка изготавливается из чистого металла, залитого в форму без перегрева, т.е. при $T=T_{кр}$ (рис. 2.43).

В этом случае температура жидкой зоны 2 в ходе всего процесса не изменяется и равна $T_2(x, t) = T_{кр}$ при $\xi < x < (2R - \xi)$. Поэтому задача сводится к нахождению функций вида (2.196) и (2.198) для распределения температур в твердой корке и форме.

Решение можно получить как частный случай решения С. Шварца при начальном условии $T_2(x, t) = T_{кр}$ и $(\frac{\partial T_2}{\partial x})_{x=\xi} = 0$.

Для распределения температур в твердой корке и форме справедливы полученные выше формулы (2.204) и (2.205).

Уравнение для определения константы затвердевания m в формуле $\xi = m\sqrt{t}$ имеет вид

$$\frac{L\rho m\sqrt{\pi}}{2} = \frac{(T_{кр} - T_{30}) \cdot b_3}{1 + \frac{b_3}{b_1} \cdot \operatorname{erf}(\frac{m}{2\sqrt{a_1}})} \cdot e^{-\frac{m^2}{4a_1}}. \quad (2.209)$$

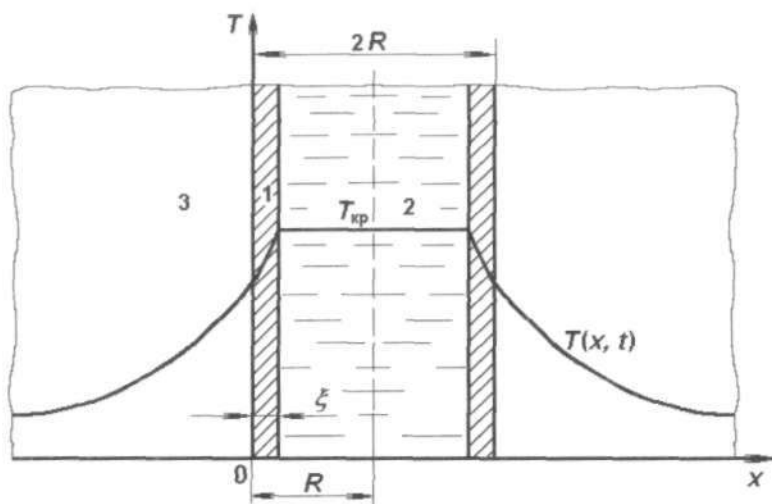


Рис. 2.43. Затвердевание плиты, залитой без перегрева:
1 – твердая корка; 2 – жидкий сплав; 3 – форма

С учетом формулы (2.208) это выражение можно упростить:

$$\frac{L\rho m\sqrt{\pi}}{2} = (T_{кр} - T_{30}) \cdot b_3 \cdot e^{-\frac{m^2}{4a_1}}.$$

При малых значениях m можно принять $\exp(-\frac{m^2}{4a_1}) = 1$. С учетом этого получаем приближенную формулу Н.И. Хворина для расчета m :

$$m = \frac{2b_3(T_{кр} - T_{30})}{\sqrt{\pi} \cdot L\rho}. \quad (2.210)$$

Для расчета $T_{кр}$ Н.И. Хворин рекомендует использовать формулу

$$T_{кр} = T_{30} + \frac{b_1(T_{кр} - T_{30})}{b_3 + b_1}, \quad (2.211)$$

которая получается из выражения (2.208), если принять $\operatorname{erf}\left(-\frac{m}{2\sqrt{a_1}}\right) = 1$.

Определив из (2.210) m , можно по формуле $t_{\text{затв}} = \frac{R^2}{m^2}$ найти продолжительность затвердевания отливки толщиной $2R$.

Указанные упрощения, как подтверждают расчеты, не приводят к большим погрешностям при литье в песчаные формы.

Анализируя приведенное решение, можно сделать заключение, что полученные Н.И. Хворинным формулы справедливы при изготовлении плоских отливок из чистых металлов в песчаных формах при температуре заливки, равной температуре кристаллизации металла $T_{\text{кр}}$. Он сформулировал следующие методы учета перегрева металла и конфигурации отливки.

Для определения константы затвердевания Н.И. Хворинов применил уравнение теплового баланса

$$(\rho_1 L + c_1 \rho_1 (T_{20} - T_{\text{кр}})) \cdot V = \frac{2b_3 (T_{\text{к}} - T_{30})}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t_{\text{затв}}} \cdot S. \quad (2.212)$$

В левой части уравнения фигурирует изменение теплосодержания залитого в форму металла при $T=T_{20}$ при его полном затвердевании, а в правой части записано выражение для определения количества тепла, переданного за время $t_{\text{затв}}$ через пограничную с отливкой плоскую поверхность формы при постоянной ее температуре, равной $T_{\text{к}}$, т.е. при граничном условии первого рода.

Из уравнения (2.212) получаем

$$R = \frac{2b_3 (T_{\text{к}} - T_{30})}{\sqrt{\pi} (\rho_1 L + c_1 \rho_1 (T_{20} - T_{\text{кр}}))} \cdot \sqrt{t_{\text{затв}}}. \quad (2.213)$$

Так как по закону квадратного корня $R = m\sqrt{t_{\text{затв}}}$, то из формулы (2.213) находим

$$m = \frac{2b_3 (T_{\text{к}} - T_{30})}{\sqrt{\pi} (\rho_1 L + c_1 \rho_1 (T_{20} - T_{\text{кр}}))}. \quad (2.214)$$

Закон квадратного корня ($\xi = m\sqrt{t}$) неприменим для затвердевания металла, залитого в форму при температуре $T_{20} > T_{кр}$. В данном случае затвердевание начнется не сразу, так как определенное время будет затрачено на отвод теплоты перегрева.

Н.И. Хворинов для затвердевания перегретых металлов предложил следующий кинетический закон: $\xi = m\sqrt{t} - R \cdot C_{ж} \frac{T_{20} - T_{кр}}{L}$. Из этой формулы следует, что нарастание твердой корки начнется в момент времени после заливки $t = \frac{R^2 C_{ж}^2 (T_{20} - T_{кр})^2}{L^2 m^2}$.

Для того чтобы распространить закон квадратного корня на отливки любой конфигурации, Н.И. Хворинов сформулировал следующие положения, получившие название *правил приведенной толщины отливки*.

1) приведенная толщина стенки отливки R_{np} равна отношению ее объема к полной поверхности охлаждения S_0 , т.е. $R_{np} = \frac{V_0}{S_0}$. Для плиты с толщиной δ_0 приведенная толщина стенки будет равна

$$R_{np} = \frac{\delta_0 \cdot B \cdot H}{2(B + H)\delta_0 + 2B \cdot H} = \frac{\delta_0}{2\left(\frac{1}{H} + \frac{1}{B}\right) + 2},$$

где B и H – ширина и высота плиты.

Если $H \gg \delta$ и $B \gg \delta$, то $R_{np} = \frac{\delta_0}{2}$. Для неограниченного цилиндра радиусом R приведенная толщина стенки будет равна $R_{np} = \frac{\pi R^2 \cdot H}{2\pi R \cdot H} = \frac{R}{2}$.

Для шара $R_{np} = \frac{4\pi R^3}{3 \cdot 4\pi R^2} = \frac{R}{3}$;

2) отливки, имеющие одинаковые приведенные толщины стенок, затвердевают за одинаковое время. Продолжительность затвердевания отливки можно определить по формуле

$$t_{затв} = \frac{R_{np}^2}{m^2}; \quad (2.215)$$

3) приведенная толщина затвердевшей корки изменяется в процессе затвердевания отливки в соответствии с формулой

$$\xi_{np} = m\sqrt{t}. \quad (2.216)$$

Для неограниченной плиты $\xi_{np} = \xi$, где ξ – толщина твердой корки.

Для неограниченного цилиндра $\xi_{np} = \frac{\pi R^2 - \pi(R - \xi)^2}{2\pi R} = \xi(1 - \frac{\xi}{2R})$.

В соответствии с формулой (2.216) $\xi(1 - \frac{\xi}{2R}) = m\sqrt{t}$. Решая это уравнение относительно ξ , найдем кинетический закон затвердевания цилиндрической отливки:

$$\xi = R - \sqrt{R^2 - 2Rm\sqrt{t}}. \quad (2.217)$$

Аналогично можно найти закон затвердевания сферической отливки:

$$\xi_{np} = \frac{\frac{4\pi R^3}{3} - \frac{4\pi(R - \xi)^3}{3}}{4\pi R^2} = \xi - \frac{\xi^2}{R} + \frac{\xi^3}{4R^2} = m\sqrt{t}.$$

Вопрос о применимости правила приведенной толщины стенки отливки до настоящего времени является дискуссионным. Многочисленные эксперименты подтверждают его применимость для расчета продолжительности затвердевания отливок из чугуна и углеродистой стали в песчаных формах.

В то же время применение этого правила для условий изготовления отливок из высокотеплопроводных сплавов приводит к большим погрешностям, поэтому в расчетные формулы необходимо ввести соответствующие поправки.

Н.Г. Гиришвич и Ю.А. Нехендзи предложили ввести в формулу (2.215) поправочные коэффициенты.

$$t_{затв} = \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \frac{R_{np}^2}{m^2}, \quad (2.218)$$

где μ_1 – поправочный коэффициент на конфигурацию отливки;

μ_2 – коэффициент, зависящий от перегрева сплава,

$$\mu_2 = 1 + \varphi \cdot \frac{C_{\infty}}{L} (T_{20} - T_{кр}),$$

где φ – коэффициент, зависящий от конфигурации отливки и материала формы.

Значения коэффициентов приведены в табл. 2.9 и 2.10.

Таблица 2.9

Значения коэффициента μ_1

Форма	Конфигурация отливки		
	Плита	Цилиндр	Шар
Песчаная	1	0,9–1,0	0,7–1,1
Металлическая	1	2,0–2,5	2,8–3,2
Водоохлаждаемая	1	2,8–3,2	3,8–4,2

Таблица 2.10

Значения коэффициента φ

Форма	Конфигурация отливки		
	Плита	Цилиндр	Шар
Песчаная	1,74	1,23	1,07
Металлическая	0,65	0,35	0,16
Водоохлаждаемая	0	0	0

Величину константы затвердевания m следует вычислять по формуле (2.210).

Полученные формулы справедливы для чистых металлов и эвтектических сплавов, имеющих фиксированную температуру кристаллизации.

По мнению А.И. Вейника, сплав, кристаллизующийся в интервале температур, можно заменить эквивалентным металлом, затвердевающим при фиксированной температуре $T_{кр}$, равной средней температуре в интервале ликвидус–солидус, к которой можно условно отнести все тепловыделение при кристаллизации данного сплава. Для определения этой температуры можно предложить формулу

$$T_{кр} = \frac{(T_{л} + T_{с}) \cdot \frac{Q_{кр}}{2} + Q_{с} \cdot T_{с}}{Q_{кр} + Q_{с}}. \quad (2.220)$$

Для сплавов типа твердых растворов ($Q_{с}=0$) из формулы (2.220) получаем $T_{кр} = \frac{T_{л} + T_{с}}{2}$, а для строго эвтектического сплава ($Q_{кр}=0$) $T_{кр}=T_{с}$.

2.2.4. Приближенные методы расчета кинетики затвердевания отливок

Большинство приближенных методов основано на использовании установленного А.И. Вейником положения, что процесс охлаждения металлической отливки в песчаной и металлической форме осуществляется с малой интенсивностью ($Bi \ll 1$). При этом перепадом температур по сечению отливки можно пренебречь по сравнению с температурным перепадом в стенке формы.

На основании этого А.И. Вейник разделил процесс затвердевания на несколько последовательно протекающих этапов:

- 1) охлаждение сплава при заполнении формы;
- 2) отвод теплоты перегрева по всему сечению отливки;
- 3) затвердевание отливки, т.е. отвод теплоты кристаллизации.

Первый этап не будем учитывать, т.е. примем, что форма заполняется мгновенно.

Метод Г.Ф. Баландина

Рассмотрим этап отвода теплоты перегрева. Анализ строгого решения соответствующей краевой задачи, выполненный Г.Ф. Баландиным, позволил установить, что с достаточной точностью для вычисления плотности теплового потока через внутреннюю пограничную с отливкой поверхность песчаной формы можно применить формулу (2.124), полученную для прогрева полубесконечного тела при постоянной температуре его поверхности. Для рассматриваемого случая эта формула принимает вид

$$q = \frac{b_3(T_2 - T_{30})}{\sqrt{\pi \cdot t}}, \quad (2.221)$$

где b_3 – коэффициент аккумуляции тепла материалом формы;

T_2 – температура сплава.

Приравняв $q \cdot S$ изменению теплосодержания перегретого сплава за время dt за счет теплопередачи в форму через поверхность S , получим следующее уравнение теплового баланса:

$$\frac{b_3(T_2 - T_{30})}{\sqrt{\pi \cdot t}} \cdot S \cdot dt = -C_{ж} \cdot \rho_{ж} \cdot V_0 \cdot dT_2, \quad (2.222)$$

где V_0 – объем отливки.

Разделим переменные и учтем, что $\frac{V_0}{S} = R_{np}$, тогда

$$\frac{dT_2}{T_2 - T_{30}} = - \frac{b_3 \cdot dt}{\sqrt{\pi} \cdot C_{ж} \cdot \rho_{ж} \cdot R_{np}}.$$

Выполним интегрирование при начальном условии $T_2 = T_{20}$ при $t = 0$.

$$\ln \frac{T_2 - T_{30}}{T_{20} - T_{30}} = - \frac{2b_3 \cdot \sqrt{t}}{\sqrt{\pi} \cdot C_{ж} \cdot \rho_{ж} \cdot R_{np}},$$

или

$$\frac{T_2 - T_{30}}{T_{20} - T_{30}} = \exp\left(-\frac{2b_3 \cdot \sqrt{t}}{\sqrt{\pi} \cdot C_{ж} \cdot \rho_{ж} \cdot R_{np}}\right). \quad (2.223)$$

Разложим экспоненту в ряд и отбросим все его члены, **кроме первых** двух:

$$\exp\left(-\frac{2b_3 \cdot \sqrt{t}}{\sqrt{\pi} \cdot C_{ж} \cdot \rho_{ж} \cdot R_{np}}\right) \approx 1 - \frac{2b_3 \cdot \sqrt{t}}{\sqrt{\pi} \cdot C_{ж} \cdot \rho_{ж} \cdot R_{np}}.$$

С учетом этого из формулы (2.223) найдем выражение для вычисления продолжительности отвода теплоты перегрева t_1 (при $t = t_1$ $T_2 = T_n$):

$$t_1 = \left(\frac{\sqrt{\pi} \cdot C_{ж} \cdot \rho_{ж} \cdot R_{np} (T_{20} - T_n)}{2b_3 (T_{20} - T_{30})} \right)^2. \quad (2.224)$$

Аналогично напишем уравнение теплового баланса **для** этапа затвердевания отливки:

$$\frac{b_3 (T_2 - T_{30})}{\sqrt{\pi} \cdot t} \cdot S \cdot dt = -C_{эфф} \cdot \rho_{ж-т} \cdot V_0 \cdot dT_2,$$

где $C_{эфф}$ – эффективная теплоемкость сплава в интервале **ликвидус– соли-**

дус, вычисляемая по формуле $C_{эфф} = C_{ж-т} + \frac{Q_{\varphi}}{T_n - T_c}$.

После разделения переменных и интегрирования при начальном условии $T_2=T_{\text{л}}$ при $t=t_1$ получаем следующее выражение:

$$\frac{T_2 - T_{30}}{T_{\text{л}} - T_{30}} = \exp\left(-\frac{2b_3(\sqrt{t} - \sqrt{t_1})}{\sqrt{\pi} \cdot C_{\text{эфф}} \cdot \rho_{\text{ж-т}} \cdot R_{\text{пр}}}\right).$$

Примем $\exp\left(-\frac{2b_3(\sqrt{t} - \sqrt{t_1})}{\sqrt{\pi} \cdot C_{\text{эфф}} \cdot \rho_{\text{ж-т}} \cdot R_{\text{пр}}}\right) \approx 1 - \frac{2b_3(\sqrt{t} - \sqrt{t_1})}{\sqrt{\pi} \cdot C_{\text{ж}} \cdot \rho_{\text{ж-т}} \cdot R_{\text{пр}}}.$

Выполнив преобразования, получим следующую формулу для расчета продолжительности затвердевания отливки $t_{\text{затв}}$ (при $t=t_{\text{затв}}$ $T_2=T_c$):

$$t_{\text{затв}} = \left(\sqrt{t_1} + \frac{\sqrt{\pi} \cdot C_{\text{эфф}} \cdot \rho_{\text{ж-т}} \cdot R_{\text{пр}} (T_{\text{л}} - T_c)}{2b_3 (T_{\text{л}} - T_{30})}\right)^2, \quad (2.225)$$

где величина t_1 рассчитывается по формуле (2.224).

Г.Ф. Баландин предложил ввести в формулу (2.225) поправочный множитель μ , учитывающий конфигурацию отливки.

$$t_{\text{затв}} = \mu \left(\sqrt{t_1} + \frac{\sqrt{\pi} \cdot C_{\text{эфф}} \cdot \rho_{\text{ж-т}} \cdot R_{\text{пр}} (T_{\text{л}} - T_c)}{2b_3 (T_{\text{л}} - T_{30})}\right)^2. \quad (2.226)$$

Здесь $\mu = \left(\frac{1}{B} (\sqrt{1+2B} - 1)\right)^2$, если $\frac{b_3}{b_1} \leq 0,1$; $\mu=1$, если $\frac{b_3}{b_1} > 0,1$:

$$B = \frac{\pi k \cdot C_{\text{тв}} \cdot \rho_{\text{тв}}}{4(k+1) \cdot C_{\text{ф}} \cdot \rho_{\text{ф}}} \left(\frac{C_{\text{эфф}} \cdot \rho_{\text{ж-т}} (T_{\text{л}} - T_c)}{C_{\text{тв}} \cdot \rho_{\text{тв}} (T_{\text{л}} - T_{30})} + \frac{C_{\text{ж}} \cdot \rho_{\text{ж}} (T_{20} - T_{\text{л}})}{C_{\text{тв}} \cdot \rho_{\text{тв}} (T_{20} - T_{30})} \right),$$

где $k=0$ (для плиты), $k=1$ (для цилиндра) и $k=2$ (для шара).

Методы А.И. Вейника, Ю.А. Нехендзи и Н.Г. Гиршовича для расчета продолжительности затвердевания отливок в металлических формах

При литье в металлические формы, как предложил А.И. Вейник, в

случае $\frac{\delta_{\text{ф}}}{R} > 1$ можно пренебречь потерями тепла из формы в окружающую среду.

шее пространство в процессе затвердевания отливки. При этом практически все тепло, переданное отливкой, будет аккумулировано формой.

Затвердевание отливки в металлической форме, температура которой неравномерно распределена по толщине стенки формы и меняется со временем, А.И. Вейник свел к случаю охлаждения отливки в среде с постоянной температурой, равной среднекалориметрической температуре кокиля. Он предложил формулы для расчета среднекалориметрической температуры (T_{κ}). Она равна температуре, к которой стремятся отливка и форма в конце теплообмена. В процессе отвода теплоты перегрева среднекалориметрическая температура равна

$$T_{\kappa 1} = \frac{T_{20} + \frac{C_3 \cdot \rho_3 \cdot V_{\phi} \cdot T_{30}}{C_{\text{ж}} \cdot \rho_{\text{ж}} \cdot V_o}}{1 + \frac{C_3 \cdot \rho_3 \cdot V_{\phi}}{C_{\text{ж}} \cdot \rho_{\text{ж}} \cdot V_o}}, \quad (2.227)$$

где V_{ϕ} и V_o – объем формы и отливки.

Примем, что отливка охлаждается с коэффициентом теплоотдачи α_{o1} . Для определения α_{o1} напомним балансное уравнение для начального момента времени $\alpha_{o1}(T_{20} - T_{\kappa 1}) = \alpha_1(T_{20} - T_{30})$, $\alpha = \frac{1}{\delta_{\text{кр}} / \lambda_{\text{кр}}}$, где;

$$\alpha_{o1} = \frac{\alpha_1(T_{20} - T_{30})}{T_{20} - T_{\kappa 1}}.$$

Для охлаждения сплава напомним следующее уравнение теплового баланса: $C_{\text{ж}} \cdot \rho_{\text{ж}} \cdot V_o \cdot dT_2 = -\alpha_{o1}(T_2 - T_{\kappa 1}) \cdot S \cdot dt$. Разделив переменные и проинтегрировав уравнение при начальном условии ($t=0, T_2=T_{20}$), получим формулу $\ln\left(\frac{T_2 - T_{\kappa 1}}{T_{20} - T_{\kappa 1}}\right) = -\frac{\alpha_{o1} \cdot t}{C_{\text{ж}} \cdot \rho_{\text{ж}} \cdot R_{\text{пр}}}$. В момент снятия перегрева $t=t_1$ и $T_2=T_{\text{л}}$. С учетом этого находим

$$t_1 = \frac{C_{\text{ж}} \cdot \rho_{\text{ж}} \cdot R_{\text{пр}}}{\alpha_{o1}} \cdot \ln\left(\frac{T_{20} - T_{\kappa 1}}{T_{\text{л}} - T_{\kappa 1}}\right). \quad (2.228)$$

Уравнение теплового баланса для этапа затвердевания отливки имеет вид

$$C_{эфф} \cdot \rho_{ж-т} \cdot V_o \cdot dT_2 = -\alpha_{o2} (T_2 - T_{к2}) \cdot S \cdot dt, \quad (2.229)$$

где $C_{эфф} = C_{ж-т} + \frac{Q_{кр}}{T_l - T_c}$; $\alpha_{o2} = \alpha_2 \frac{T_{20} - T_{30}}{T_{20} - T_c}$; $\alpha_2 = \frac{1}{\frac{\delta_{кр}}{\lambda_{кр}} + \frac{\delta_{злз}}{\lambda_{злз}}}$.

Среднекалориметрическую температуру $T_{к2}$ определим из следующего балансного уравнения:

$$C_3 \cdot \rho_3 \cdot V_\phi \cdot (T_{к2} - T_{30}) = V_o (C_{жс} \cdot \rho_{жс} \cdot (T_{20} - T_{к2}) + \\ + Q_{кр} \cdot \rho_{ж-т} + Q_c \cdot \rho_l + C_{жс-т} \cdot \rho_{жс-т} \cdot (T_l - T_c)).$$

Решив это уравнение относительно $T_{к2}$, находим

$$T_{к2} = T_{к1} + \frac{C_{жс} \cdot \rho_{жс-т} (T_l - T_c) + Q_{кр} \cdot \rho_{ж-т} + Q_c \cdot \rho_l}{C_{жс} \cdot \rho_{жс} (1 + \frac{C_3 \cdot \rho_3 \cdot V_\phi}{C_{жс} \cdot \rho_{жс} \cdot V_o})}. \quad (2.230)$$

При интегрировании уравнения (2.229) необходимо учесть, что в сплавах с эвтектическим превращением при $T=T_c$ выделяется теплота кристаллизации $Q_c \cdot \rho_l \cdot V_o$, на отвод которой необходимо затратить время

$$t_c = \frac{Q_c \cdot \rho_l \cdot V_o}{\alpha_{o2} (T_c - T_{к2}) \cdot S} = \frac{Q_c \cdot \rho_l \cdot R_{np}}{\alpha_{o2} (T_c - T_{к2})}.$$

Разделив переменные в уравнении (2.229) и выполнив интегрирование при начальном условии ($t=t_1$ и $T_2=T_l$), получаем

$$t = t_1 + \frac{C_{эфф} \cdot \rho_{ж-т} \cdot R_{np}}{\alpha_{o2}} \cdot \ln\left(\frac{T_l - T_{н2}}{T_2 - T_{к2}}\right).$$

В момент $t_{затв}$ завершения затвердевания $T_2=T_c$. С учетом t_c получаем формулу для расчета продолжительности затвердевания отливки в металлической форме

$$t_{\text{затв}} = t_1 + \frac{Q_c \cdot \rho_1 \cdot R_{\text{нр}}}{\alpha_{o2} (T_c - T_{\kappa 2})} + \frac{C_{\text{эфф}} \cdot \rho_{\text{ж-т}} \cdot R_{\text{нр}}}{\alpha_{o2}} \cdot \ln\left(\frac{T_c - T_{\kappa 2}}{T_c - T_{\kappa 1}}\right), \quad (2.231)$$

где t_1 рассчитывается по формуле (2.228).

Для неограниченной плиты $\frac{V_o}{V_\phi} = \frac{\delta_\phi}{R}$.

Для цилиндра $\frac{V_o}{V_\phi} = 2 \frac{\delta_\phi}{R} + \left(\frac{\delta_\phi}{R}\right)^2$.

Для шара $\frac{V_o}{V_\phi} = 3\left(\frac{\delta_\phi}{R} + \left(\frac{\delta_\phi}{R}\right)^2\right) + \left(\frac{\delta_\phi}{R}\right)^3$.

Как утверждает Г.Ф. Баландин, формула (2.231) справедлива при $Bi = \frac{\alpha_2 \cdot R_{\text{нр}}}{\lambda_1} < 0,1$.

Н.Г. Гиришвичем и Ю.А. Нехендзи предпринята попытка распространить закон квадратного корня на кокильные отливки. Обобщая результаты моделирования процесса на гидронтеграторе, они предложили формулу

$$t_{\text{затв}} = \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \phi \left(\frac{R_{\text{нр}}}{m}\right)^2, \quad (2.232)$$

где μ_1 и ϕ – коэффициенты, значения которых приведены в табл. 2.9 и 2.10;

$$\mu_2 = 1 + \frac{2}{Bi}.$$

2.2.5. Сравнительный анализ расчетных методов

В заключение рассмотрим примеры расчетов продолжительности затвердевания отливки с использованием рассмотренных выше методов.

Пример 1. Рассчитать продолжительность затвердевания плоской и цилиндрической отливок из стали 110Г13Л в песчано-глинистой форме при следующих исходных данных: радиус и половина толщины стенки отливки $R=20$ мм; $T_{20}=1500$ °С; $T_{30}=20$ °С; $T_{\text{л}}=1365$ °С; $T_c=1260$ °С; $\lambda_3=0,833$ Вт/(м·К); $C_3=1041$ Дж/(кг·К); $\rho_3=1800$ кг/м³; $b_3=1198$ Вт·с^{1/2}/(м²·К); $\lambda_{\text{ж}}=25,5$ Вт/(м·К); $\rho_{\text{ж}}=7150$ кг/м³; $G_{\text{ж}}=675$ Дж/(кг·К).

$b_{жс}=11094 \text{ Вт}\cdot\text{с}^{1/2}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$; $\lambda_{мс}=29 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$; $\rho_{мс}=7850 \text{ кг}/\text{м}^3$; $C_{мс}=635 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$;
 $b_{мс}=12023 \text{ Вт}\cdot\text{с}^{1/2}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$; $\lambda_{жс-мс}=27,5 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$; $\rho_{жс-мс}=7350 \text{ кг}/\text{м}^3$;
 $C_{жс-мс}=655 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$; $b_{жс-мс}=11506 \text{ Вт}\cdot\text{с}^{1/2}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$; $Q_c=0$; $Q_{кр}=324365 \text{ Дж}/\text{кг}$.

Приведенная толщина стенки $R_{пр}=0,02$ (для плоской отливки) и $R_{пр}=0,01$ (для цилиндра).

Температура кристаллизации эквивалентного металла равна

$$T_{кр} = \frac{1260 + 1365}{2} = 1312,5 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Выполним расчет $t_{затв}$ по формуле (2.226):

$$t_{затв} = \mu \left(\sqrt{t_1} \frac{\sqrt{\pi} \cdot C_{эфф} \cdot \rho_{жс-мс} \cdot R_{пр} (T_a - T_c)}{2b_3 (T_a - T_{30})} \right)^2.$$

Так как $\frac{b_3}{b_1} = \frac{1178}{12023} = 0,098 < 0,1$, то $\mu = \left(\frac{1}{B} (\sqrt{1+2B} - 1) \right)^2$. Для

плоской плиты ($\kappa=0$) $B=0$, $\mu = \lim_{B \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1+2B} - 1}{B} \right)^2 = \left(\lim_{B \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2B} - 1}{B} \right)^2$,
 т.е. имеем неопределенность типа $0/0$. Применим правило Лопиталя:

$$\mu = \left(\frac{2}{2\sqrt{1+2B}} \right)^2 = 1.$$

Для цилиндрической отливки ($\kappa=1$)

$$B = \frac{3,14 \cdot 1 \cdot 635 \cdot 7850}{4 \cdot 2 \cdot 1041 \cdot 1800} \cdot \left(\frac{655 \cdot 7350 \cdot 105 + 324365 \cdot 7350}{635 \cdot 7850 \cdot 1345} + \frac{675 \cdot 7150 \cdot 135}{635 \cdot 7850 \cdot 1480} \right) = 0,467.$$

$$\mu = \left(\frac{1}{0,467} (\sqrt{1+2 \cdot 0,567} - 1) \right)^2 = 0,703.$$

По формуле (2.224) рассчитываем

$$\frac{t_1}{R_{пр}^2} = \left(\frac{\sqrt{3,14} \cdot 675 \cdot 7150 \cdot 135}{2 \cdot 1198 \cdot 1480} \right)^2 = 106003 \text{ с}/\text{м}^2.$$

$$\frac{t_{затв}}{R_{пр}^2} = \mu \left(\sqrt{106003} + \frac{\sqrt{3,14} \cdot (655 \cdot 7350 \cdot 105 + 324365 \cdot 7350)}{2 \cdot 1198 \cdot 1345} \right)^2 = 3795133 \mu.$$

Для плиты $t_{затв} = 3795133 \cdot \mu \cdot R_{пр}^2 = 3795133 \cdot 1 \cdot (0,02)^2 = 1518 \text{ с}$.

Для цилиндра $t_{затв} = 3795133 \cdot 0,703 \cdot (0,01)^2 = 267 \text{ с}$.

Выполним расчет продолжительности затвердевания по методу Н.И. Хворинова. По формуле (2.214) вычислим константу затвердевания m :

$$m = \frac{2 \cdot 1198 \cdot (1312,5 - 20)}{\sqrt{3,14} \cdot (7350 \cdot (324365 + 635 \cdot 105) + 675 \cdot 7150 \cdot (1150 - 1312,5)) \left(1 + \frac{1198}{12023}\right)} = 4,1 \cdot 10^{-4}.$$

Тогда $t_{\text{затв}} = \frac{R_{\text{пр}}^2}{m^2}$. Для плоской отливки $t_{\text{затв}} = \frac{0,02^2}{(4,1 \cdot 10^{-4})^2} = 2380 \text{ с},$

для цилиндрической отливки $t_{\text{затв}} = \frac{0,01^2}{(4,1 \cdot 10^{-4})^2} = 595 \text{ с}.$

В заключение рассчитаем продолжительность затвердевания отливок по формуле Н.Г. Гиршовича и Ю.А. Нехендзи (2.218) (при $\mu_1=1$ для плоской отливки и при $\mu_1=0,9$ для цилиндрической отливки).

Для плиты $\mu_2 = 1 + \frac{1,74 \cdot 675 \cdot (1500 - 1312,5)}{324365 + 655 \cdot 105} = 1,56.$

Для цилиндрической отливки $\mu_2 = 1 + \frac{1,23 \cdot 675 \cdot (1500 - 1312,5)}{324365 + 655 \cdot 105} = 1,396.$

По формуле (2.214), приняв $T_{20}=T_{\text{кр}}$, находим m :

$$m = \frac{2 \cdot 1198 \cdot (1312,5 - 20)}{\sqrt{3,14} \cdot (7350 \cdot (324365 + 635 \cdot 105) \left(1 + \frac{1198}{12023}\right))} = 5,94 \cdot 10^{-4}.$$

$$t_{\text{затв}} = 1 \cdot 1,56 \cdot \frac{0,02^2}{(5,94 \cdot 10^{-4})^2} = 1768 \text{ с (для плоской плиты);}$$

$$t_{\text{затв}} = 0,96 \cdot 1,396 \cdot \frac{0,01^2}{(5,94 \cdot 10^{-4})^2} = 356 \text{ с (для цилиндрической отливки).}$$

Результаты расчетов сведены в табл. 2.11. Для сравнения приведены данные соответствующих численных расчетов на ЭВМ и результаты экспериментов.

Из таблицы видно, что разные методы расчета дают большой разброс данных. Наибольшую точность по сравнению с экспериментальными данными обеспечивает численный расчет на ЭВМ.

Для иллюстрации определения продолжительности затвердевания отливок в металлических формах приведем пример решения следующей задачи.

Таблица 2.11

Расчетные и экспериментальные данные по продолжительности затвердевания отливок из стали 110Г13Л

Конфигурация отливки	Продолжительность затвердевания, с, для расчета				Экспериментальные данные
	по методу Г.Ф. Баландина	по методу Н.И. Хво-ринова	по фор-муле (2.218)	на ЭВМ	
Плита	1518	2380	1768	1858	1800
Цилиндр	267	595	356	284	310

Пример 2. Рассчитать продолжительность затвердевания плоской отливки из алюминиевого сплава АК7ч в металлической форме при следующих исходных данных: половина толщины стенки отливки $R=2$ см; толщина стенки формы $\delta_{\phi}=7$ см; материал формы – чугун; $C_3=0,56$ Дж/(г·К); $\rho_3=7,2$ г/см³; $T_{20}=800$ °С; $T_d=610$ °С; $T_c=577$ °С; $Q_{кр}=170$ Дж/г; $Q_c=195$ Дж/г; $C_{ж}=1,28$ Дж/(г·К); $\rho_{ж}=2,2$ г/см³; $\lambda_{ж}=0,83$ Вт/(см·К); $C_1=1,08$ Дж/(г·К); $\rho_1=2,5$ г/см³; $\lambda_1=1,04$ Вт/(см·К); $C_{ж-тв}=1,18$ Дж/(г·К); $\rho_{ж-тв}=2,35$ г/см³; $\lambda_{ж-тв}=0,93$ Вт/(см·К); толщина кокильного покрытия $\delta_{кр}=0,017$ см; $\lambda_{кр}=0,005$ Вт/(см·К); $\delta_{газ}=0$.

Выполним расчет по формулам (2.228) и (2.231). По формуле (2.227) определим среднекалориметрическую температуру $T_{к1}$:

$$T_{к1} = \frac{800 + \frac{0,56 \cdot 7,2 \cdot 3,5 \cdot 200}{1,28 \cdot 2,2}}{1 + \frac{0,56 \cdot 7,2 \cdot 3,5}{1,28 \cdot 2,2}} = 299,9 \text{ °С.}$$

$$\alpha_{ол} = \frac{T_2 - T_{30}}{T_{20} - T_{к1}} = \frac{0,005 \cdot (800 - 200)}{0,01 \cdot (800 - 299,9)} = 0,6 \text{ Вт/(см}^2\text{·К);}$$

$$t_1 = \frac{1,28 \cdot 2,2 \cdot 2}{0,6} \cdot \ln \frac{800 - 299,9}{610 - 299,9} = 4,49 \text{ с.}$$

$$T_{к2} = 299,9 + \frac{(170 + 1,18 \cdot 33) \cdot 2,35 + 195 \cdot 2,5}{(1 + \frac{0,56 \cdot 7,2 \cdot 3,5}{1,28 \cdot 2,2}) \cdot 1,28 \cdot 2,2} = 357,7 \text{ °С.}$$

$$\alpha_{o2} = \frac{0,005 \cdot (800 - 200)}{0,01 \cdot (800 - 357,7)} = 0,678 \text{ Вт/(см}^2 \cdot \text{К)};$$

$$t_{\text{затв}} = 4,49 + \frac{195 \cdot 2,5 \cdot 2}{0,678 \cdot (577 - 357,7)} + \frac{(170 + 1,18 \cdot 33) \cdot 2,35 \cdot 2}{33 \cdot 0,678} \ln \frac{610 - 357,7}{577 - 357,7} = 17,2 \text{ с.}$$

$$\text{Bi} = \frac{\alpha_2 \cdot R}{\lambda_1} = \frac{0,005 \cdot 2}{0,01 \cdot 1,04} = 0,96.$$

Выполним аналогичный расчет при $\lambda_{кр}=0,0027 \text{ Вт/(см} \cdot \text{К)}$, $\delta_{кр}=0,065 \text{ см}$ и $\lambda_{кр}=0,0027 \text{ Вт/(см} \cdot \text{К)}$, $\delta_{кр}=0,13 \text{ см}$.

При $\lambda_{кр}=0,0027 \text{ Вт/(см} \cdot \text{К)}$ и $\delta_{кр}=0,065 \text{ см}$:

$$\alpha_{o1} = \frac{0,0027 \cdot (800 - 200)}{0,065 \cdot (800 - 299,9)} = 0,05 \text{ Вт/(см}^2 \cdot \text{К)};$$

$$\alpha_{o2} = \frac{0,0027 \cdot (800 - 200)}{0,065 \cdot (800 - 357,7)} = 0,057 \text{ Вт/(см}^2 \cdot \text{К)};$$

$$\begin{aligned} t_{\text{затв}} &= \frac{1,28 \cdot 2,2 \cdot 2}{0,05} \ln \frac{800 - 299,9}{610 - 299,9} + \frac{195 \cdot 2,5 \cdot 2}{0,057 \cdot (577 - 357,7)} + \\ &= \frac{(170 + 1,18 \cdot 33) \cdot 2,35 \cdot 2}{33 \cdot 0,057} \ln \frac{610 - 357,7}{577 - 357,7} = 204,6 \text{ с.} \end{aligned}$$

При $\lambda_{кр}=0,0027 \text{ Вт/(см} \cdot \text{К)}$ и $\delta_{кр}=0,13 \text{ см}$:

$$\alpha_{o1} = \frac{0,0027 \cdot (800 - 200)}{0,13 \cdot (800 - 299,9)} = 0,025 \text{ Вт/(см}^2 \cdot \text{К)};$$

$$\alpha_{o2} = \frac{0,0027 \cdot (800 - 200)}{0,13 \cdot (800 - 357,7)} = 0,0285 \text{ Вт/(см}^2 \cdot \text{К)};$$

$$\text{Bi} = \frac{\alpha_2 \cdot R}{\lambda_1} = \frac{0,0027 \cdot 2}{0,13 \cdot 1,04} = 0,039.$$

$$t_{\text{затв}} = \frac{1,28 \cdot 2,2 \cdot 2}{0,025} \ln \frac{800 - 299,9}{610 - 299,9} + \frac{195 \cdot 2,5 \cdot 2}{0,0285 \cdot (577 - 357,7)} +$$

$$= \frac{(170 + 1,18 \cdot 33) \cdot 2,35 \cdot 2}{33 \cdot 0,0285} \ln \frac{610 - 357,7}{577 - 357,7} = 409,2 \text{ с.}$$

При тех же условиях выполним расчеты по формуле (2.232). Сначала вычислим константу затвердевания:

$$m = \frac{2 \cdot 13 \cdot (584,7 - 200)}{\sqrt{3,14 \cdot (2,5 \cdot 19,5 + (170 + 1,18 \cdot 33) \cdot 2,35)}} = 0,577 \text{ см/с}^{1/2}.$$

Здесь учтено, что в соответствии с формулой (2.220) температура кристаллизации эквивалентного металла равна

$$T_{\text{кр}} = \frac{\frac{(610 + 577) \cdot 195}{2} + 170 \cdot 577}{170 + 195} = 584,7 \text{ }^{\circ}\text{C}.$$

Находим μ_3 :

$$\text{при } Bi=0,96 \quad \mu_3 = 1 + \frac{2}{Bi} = 1 + \frac{2}{0,96} = 3,08;$$

$$\text{при } Bi=0,078 \quad \mu_3 = 1 + \frac{2}{0,078} = 26,6;$$

$$\text{при } Bi=0,039 \quad \mu_3 = 1 + \frac{2}{0,039} = 52,3.$$

$$\mu_1 = 1; \quad \mu_3 = 1 + \frac{0,65 \cdot 1,28 \cdot (800 - 584,7)}{170 + 1,18 \cdot 33 + 195} = 1,44.$$

По формуле $t_{\text{затв}} = \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \mu_3 \cdot \left(\frac{R_{\text{пр}}}{m}\right)^2$ находим:

$$\text{при } Bi=0,96 \quad t_{\text{затв}} = 1 \cdot 1,44 \cdot 3,08 \cdot \left(\frac{2}{0,577}\right)^2 = 54,2 \text{ с;}$$

$$\text{при } Bi=0,078 \quad t_{\text{затв}} = 1 \cdot 1,44 \cdot 26,6 \cdot \left(\frac{2}{0,577}\right)^2 = 460 \text{ с;}$$

$$\text{при } Bi=0,039 \quad t_{\text{затв}} = 1 \cdot 1,44 \cdot 52,3 \cdot \left(\frac{2}{0,577}\right)^2 = 905 \text{ с.}$$

Результаты расчетов сведены в табл. 2.12.

Таблица 2.12

Расчетные и экспериментальные данные по продолжительности затвердевания сплава АК7ч в металлической форме

Значение Bi	Продолжительность затвердевания, с, при расчете			Эксперимен- тальные данные
	по формулам (2.228) и (2.231)	по формуле (2.232)	на ЭВМ (численный расчет)	
0,960	17,2	54,2	77,0	71,0
0,078	204,6	460,0	337,0	370,0
0,039	409,2	905,0	610,0	650,0

Из таблицы видно, что только численные методы расчета обеспечивают достаточную точность. Хотя погрешность применения метода А.И. Вейника снижается с уменьшением Bi , однако даже при $Bi=0,039$ она составляет около 50 %.

2.3. Численные методы расчета кинетики затвердевания отливок

В прикладной математике разработан ряд численных методов решения краевых задач, основанных на дискретном представлении пространства, занятого системой, и рассмотрении процесса в дискретном времени.

Среди численных методов, применяемых для расчета кинетики затвердевания отливок можно выделить метод конечных разностей, метод конечных элементов и метод потоков.

2.3.1. Метод конечных разностей

Основные принципы МКР

Проиллюстрируем сущность МКР на примере следующей задачи.

Найти распределение температур, т.е. функцию $T=T(r, t)$, в теле классической конфигурации при краевых условиях: $T(r=R_1, t)=T_1$; $T(r=R_2, t)=T_2$; $T(r, t=0)=T_0$.

Напишем дифференциальное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{k}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad R_1 < r < R_2. \quad (2.233)$$

Граничные условия:

$$T(r = R_1, t) = T_1; \quad (2.234)$$

$$T(r = R_2, t) = T_2; \quad (2.235)$$

начальное условие

$$T(r, t) = T_0. \quad (2.236)$$

Разобьем ось r в пределах от R_1 до R_2 на MM отрезков с шагом, равным $h = \frac{R_2 - R_1}{MM}$. При этом точки, разделяющие слои и находящиеся на границах области, образуют M узлов с координатами $r = R_1 + (i-1) \cdot h$, где $i=1, 2, 3, \dots, M$. Очевидно, что число узлов $M = MM + 1$.

Далее примем, что время, начиная с $t=0$, изменяется не непрерывно, а шагами Δt , т.е. дискретное время можно определить по формуле $t_k = k \cdot \Delta t$, где k – номер временного шага ($k=0, 1, 2, 3, \dots, j$). На рис. 2.44 показана дискретная пространственно-временная сетка.

Искомым решением поставленной задачи является определение функции $T(r, t)$, заданной в непрерывной области: $R_1 \leq r \leq R_2$ и $0 \leq t \leq t_{\max}$.

При использовании МКР ставится более скромная задача: определение значений температуры T_i^k в дискретных узлах с координатами $r=r_i$ в дискретные промежутки времени $t=t_k$.

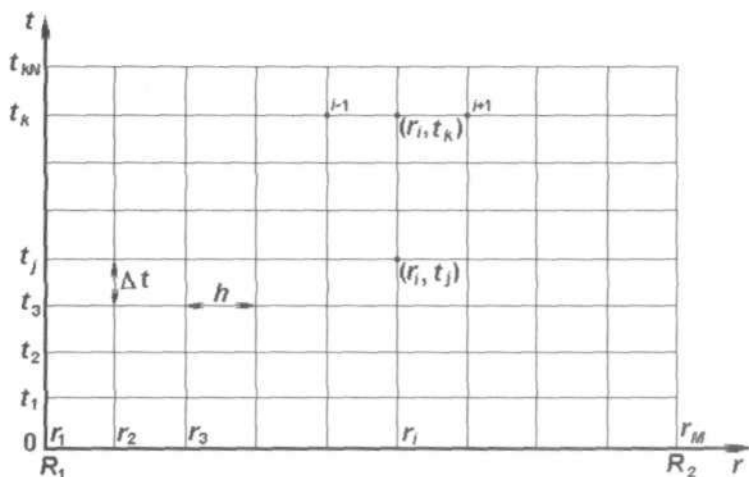


Рис. 2.44. Дискретная пространственно-временная сетка

Мы выбрали шаги h и Δt равномерными. Принципиально в зависимости от специфики задачи величины h и Δt могут быть неравными, т.е. в некоторых участках тела сетка может быть гуще, а в других – реже, и по мере развития процесса шаги Δt можно увеличивать или уменьшать.

Возьмем некоторый произвольный момент времени t_k . В данный момент времени температуры в пространственных узлах сетки будут равны T_i^k . Выразим с помощью формулы Тейлора температуру в узле i через значения температуры в соседних узлах $(i+1)$ и $(i-1)$:

$$T_{i-1}^k = T_i^k - \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_i \cdot h + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\right)_i \cdot \frac{h^2}{2} - \left(\frac{\partial^3 T}{\partial r^3}\right)_i \cdot \frac{h^3}{6} + \left(\frac{\partial^4 T}{\partial r^4}\right)_i \cdot \frac{h^4}{24} - \dots$$

$$T_{i+1}^k = T_i^k + \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_i \cdot h + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\right)_i \cdot \frac{h^2}{2} + \left(\frac{\partial^3 T}{\partial r^3}\right)_i \cdot \frac{h^3}{6} + \left(\frac{\partial^4 T}{\partial r^4}\right)_i \cdot \frac{h^4}{24} + \dots$$

Сложим левые и правые части этих уравнений.

$$T_{i-1}^k + T_{i+1}^k - 2T_i^k = \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\right)_i \cdot \frac{h^2}{2} + \left(\frac{\partial^4 T}{\partial r^4}\right)_i \cdot \frac{h^4}{24} + \dots$$

$$\text{Отсюда находим } \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\right)_i = \frac{T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k}{h^2} - \frac{\partial^4 T}{\partial r^4} \cdot \frac{h^2}{12} \dots$$

Если пренебречь вторым и всеми последующими слагаемыми в правой части этого равенства, то для аппроксимации производной $\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\right)_i$ получим выражение

$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\right)_i = \frac{T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k}{h^2} + O(h^2)$, где $O(h^2)$ – погрешность, имеющая размерность h^2 . Если выбрать h достаточно малым, то погрешностью $O(h^2)$ можно пренебречь, т.е. принять

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\right)_i = \frac{T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k}{h^2}. \quad (2.137)$$

Если из второго из написанных выше разложений в ряд Тейлора вычесть первое, то получим выражение

$$T_{i+1}^k - T_{i-1}^k = 2\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_i \cdot h + \left(\frac{\partial^3 T}{\partial r^3}\right)_i \cdot \frac{h^3}{3} + \dots,$$

из которого находим

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_i = \frac{T_{i+1}^k - T_{i-1}^k}{2h} - \left(\frac{\partial^3 T}{\partial r^3}\right)_i \cdot \frac{h^2}{6}, \text{ или } \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_i = \frac{T_{i+1}^k - T_{i-1}^k}{2h} + O(h^2).$$

Пренебрегая погрешностью $O(h^2)$, получим следующее выражение для аппроксимации производной $\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)$:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_i = \frac{T_{i+1}^k - T_{i-1}^k}{2h}. \quad (2.238)$$

Конечную разность $T_{i+1}^k - T_{i-1}^k$ называют *центральной разностью*, так как рассматриваемая точка i находится между точками $i-1$ и $i+1$.

Различают также формулы вида

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_i = \frac{T_{i+1}^k - T_i^k}{h} \text{ и } \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_i = \frac{T_i^k - T_{i-1}^k}{h}.$$

При этом $T_{i+1}^k - T_i^k$ называется *разностью вперед* (правая разность), а $T_i^k - T_{i-1}^k$ — *разностью назад* (левая разность).

Можно показать, что в отличие от формулы (2.238), имеющей размерность погрешности аппроксимации h^2 , последние формулы имеют размерность погрешности h , т.е. с уменьшением h погрешность формулы (2.238) убывает быстрее.

Аналогично производную $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)$ можно также аппроксимировать с помощью выражений

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_i^k = \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t} + O(\Delta t); \quad (2.239)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_i^k = \frac{T_i^k - T_i^{k-1}}{\Delta t} + O(\Delta t). \quad (2.240)$$

Если заменить в уравнении (2.233) $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)$ выражением (2.239), отбросив $O(\Delta t)$, а производные $\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}$ и $\frac{\partial T}{\partial r}$ – выражениями (2.237) и (2.238), то получим разностную схему

$$\frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta h} = a \left(\frac{T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k}{h^2} + \frac{k}{R_i + (i-1)h} \cdot \frac{T_{i+1}^k - T_{i-1}^k}{2h} \right). \quad (2.241)$$

Разрешим уравнение (2.241) относительно T_i^{k+1} :

$$\begin{aligned} T_i^{k+1} = & \left(1 - \frac{2a \cdot \Delta t}{h^2}\right) T_i^k + \left(1 + \frac{k}{2\left(\frac{R_i}{h} + i - 1\right)} \cdot \frac{a \cdot \Delta t}{h^2}\right) T_{i+1}^k + \\ & + \left(1 - \frac{k}{2\left(\frac{R_i}{h} + i - 1\right)} \cdot \frac{a \cdot \Delta t}{h^2}\right) T_{i-1}^k. \end{aligned} \quad (2.242)$$

Это линейное уравнение позволяет легко вычислить значение температуры в любом внутреннем узле тела ($i=2, 3, \dots, MM$) в следующий момент времени по известным значениям температуры в данном и соседних узлах в определенный момент времени.

Таким образом, уравнение (2.133) заменяется системой ($M-2$) линейных уравнений. Вычисление температур в граничных точках ($i=1$ и $i=M$) должно осуществляться с использованием граничных условий. В рассматриваемом случае это условия:

$$T_{i=1}^k = T_{i=1}^{k+1} = T_1 \text{ и } T_{i=M}^k = T_{i=M}^{k+1} = T_2. \quad (2.243)$$

Алгоритм расчета заключается в следующем. В начальный момент, т.е. при $k=0$, температура во всех внутренних узлах ($M-2$) одинакова и равна T_0 , т.е. $T_i^{k=0} = T_0$, где $i=2, 3, \dots, MM$, а температуры в граничных узлах равны $T_1^{k=0} = T_1$ и $T_M^{k=0} = T_2$. С использованием этих значений, последовательно принимая в условиях (2.243) $i=2, 3, \dots, M$, вычисляем значения температур на следующем временном шаге, т.е. при $k=1$. Используя значения $T_i^{k=1}$, находим $T_i^{k=2}$. Продолжаем этот процесс, пока не будет достигнуто требуемое значение температуры в какой-либо точке тела.

Степень аппроксимации и устойчивость разностных схем

Основным требованием к разностной схеме является стремление точной функции $T_c(x, t)$, полученной при решении разностных уравнений, к функции $T(x, t)$, полученной при точном решении соответствующего дифференциального уравнения, при стремлении к нулю шагов интегрирования h и Δt .

Погрешность $\varepsilon_i^k = |T_{ci}^k - T_i^k|$ называется погрешностью сеточного решения. Погрешность ε_i^k в общем случае различна в разных точках пространственно-временной сетки. Для того чтобы охарактеризовать погрешность во всей пространственно-временной области, вводят понятие нормы погрешности $\|\varepsilon_i^k\| = \max_{k,i} |\varepsilon_i^k|$, т.е. норма равна наибольшему значению погрешности.

Следовательно, условие сходимости разностной схемы можно записать в виде $\lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ h \rightarrow 0}} \|\varepsilon_i^k\| = 0$. Скорость сходимости зависит от шагов интегрирования. Если при достаточно малых Δt и h выполняется условие

$$\|\varepsilon_i^k\| \leq c_1 \cdot \Delta t^r + c_2 \cdot h^p, \quad (2.244)$$

то схема сходится со скоростью $O(\Delta t^r + h^p)$, т.е. порядок точности схемы равен r по временной и p по пространственной переменной. Схема (2.242) имеет порядок $O(\Delta t + h^2)$.

Кроме понятия сходимости существует понятие погрешности аппроксимации исходного дифференциального уравнения разностными уравнениями ψ_i^k . Для схемы (2.242)

$$\begin{aligned} \psi_i^k = & \left| \left(\left(\frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t} - \frac{a}{h^2} (T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k) - \frac{ak}{2h^2 \left(\frac{R_1}{h} + i - 1 \right)} \cdot (T_{i+1}^k - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - T_{i-1}^k) \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial t} - a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{k}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right) \right) \right| = \\ & = O(h^2) + O(\Delta t). \end{aligned} \quad (2.245)$$

Очевидно, что при измельчении сетки ($\Delta t \rightarrow 0$ и $h \rightarrow 0$) $\psi_i^k \rightarrow 0$.

Величина $\|\psi_i^k\| = \max_{k,i} |\psi_i^k|$ называется нормой погрешности аппроксимации. Условие аппроксимации исходной системы дифференциальных уравнений разностной схемой имеет вид $\lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ h \rightarrow 0}} \|\psi_i^k\| = 0$.

Погрешность ψ_i^k характеризует различие между дифференциальными и разностными уравнениями, а погрешность ε_i^k – различие между решениями этих уравнений $T(x, t)$ и $T_c(x, t)$.

Понятие устойчивости связано с поведением погрешности ε_i^k при $\Delta t \rightarrow 0$ и $h \rightarrow 0$. Как было сказано выше, решение разностных уравнений осуществляется путем вычисления значений температуры в узлах сетки на следующем временном шаге T_i^{k+1} с использованием соответствующих значений температур на первом временном шаге T_i^k . Погрешность расчета температур на первом временном шаге, определяемая погрешностью ε_i' ,

будет зависеть от ψ_i' . Погрешность на втором шаге зависит от ε_i' и ψ_i^2 и т.д. Таким образом, происходит как бы перенос погрешности разностного решения предыдущего шага на текущий шаг и ее сложное взаимодействие с погрешностью аппроксимации.

Если схема не обладает устойчивостью, то происходит усиление, а не затухание погрешности в процессе выполнения расчетов. Признаком потери устойчивости схемы является ее раскачка, т.е. появление усиливающихся во времени колебаний расчетных значений температуры. В итоге решение разностных уравнений не имеет ничего общего с точным решением. При измельчении сетки погрешность не уменьшается, несмотря на уменьшение погрешности аппроксимации ψ_i^k . При $\Delta t \rightarrow 0$ и $h \rightarrow 0$ увеличивается число решаемых уравнений на каждом временном слое и количество временных шагов. Следовательно, при этом в случае неустойчивых схем будет усиливаться и накопление погрешностей решения каждого уравнения.

Теория устойчивости разностных схем очень сложна и выходит за рамки данного курса.

Рассмотрим упрощенный вывод условия устойчивости явной схемы (2.242). Уравнение (2.242) можно записать в виде

$$T_i^{k+1} = aT_{i+1}^k + bT_i^k + cT_{i-1}^k,$$

где a , b и c – некоторые коэффициенты.

Нетрудно проверить, что $a+b+c=1$. Действительно,

$$\left(1 + \frac{k}{2\left(\frac{R_1}{h} + i - 1\right)}\right) \cdot \frac{a \cdot \Delta t}{h^2} + \left(1 - \frac{2a \cdot \Delta t}{h^2}\right) + \left(1 - \frac{k}{2\left(\frac{R_1}{h} + i - 1\right)}\right) \cdot \frac{a \cdot \Delta t}{h^2} = 1.$$

Очевидно, что значение T_i^{k+1} не должно выходить за пределы температур T_{i+1}^k , T_i^k и T_{i-1}^k , т.е. $T_i^{k+1} > T_{\min}^k$ и $T_i^{k+1} < T_{\max}^k$, где $T_{\min}^k$ и $T_{\max}^k$ – соответственно наибольшее и наименьшее из значений T_{i+1}^k , T_i^k и T_{i-1}^k .

Пусть $T_{i+1}^k = T_{\max}^k$, $T_{i-1}^k = T_{\min}^k$, тогда, так как $T_{i-1}^k = T_{\min}^k$, из уравнения $T_i^{k+1} = aT_{i+1}^k + bT_i^k + (1-a-b)T_{i-1}^k = T_{i-1}^k + a(T_{i+1}^k - T_{i-1}^k) + b(T_i^k - T_{i-1}^k)$ следует, что $T_i^{k+1} - T_{i-1}^k = a(T_{i+1}^k - T_{i-1}^k) + b(T_i^k - T_{i-1}^k) > 0$.

Значит, $T_i^{k+1} \geq T_{\min}^k$, если выражение в правой части всегда положительно. Это может иметь место только при выполнении условия $a > 0$ и $b > 0$.

Преобразуем исходное уравнение к уравнению вида

$$T_i^{k+1} = (1-b-c) \cdot T_{i+1}^k + bT_i^k + cT_{i-1}^k = T_{i+1}^k - b(T_{i+1}^k - T_i^k) - c(T_i^k - T_{i-1}^k),$$

или

$$T_{i+1}^k - T_i^{k+1} = b(T_{i+1}^k - T_i^k) + c(T_i^k - T_{i-1}^k).$$

Если правая часть положительна, то $T_{i+1}^k - T_i^{k+1} > 0$ и $T_i^{k+1} < T_{i+1}^k = T_{\max}^k$. Выражения в скобках в правой части положительны, так как $T_{i+1}^k = T_{\max}^k$. Поэтому для выполнения условия $T_i^{k+1} < T_{\max}^k$ необходимо, чтобы соблюдались неравенства $b > 0$ и $c > 0$.

Таким образом, устойчивость схемы (условие $T_{\min}^k < T_i^{k+1} < T_{\max}^k$) обеспечивается, если коэффициенты разностных уравнений положительны. Для схемы (2.242)

$$a = \left(1 + \frac{k}{2\left(\frac{R_1}{h} + i - 1\right)}\right) \cdot \frac{a \cdot \Delta t}{h^2} > 0 \quad \text{и} \quad c = \left(1 - \frac{k}{2\left(\frac{R_1}{h} + i - 1\right)}\right) \cdot \frac{a \cdot \Delta t}{h^2} > 0.$$

Действительно, $\frac{k}{2(\frac{R_1}{h} + i - 1)} < 1$. Для плиты ($K=0$) это очевидно.

Для цилиндра $\frac{k}{2(\frac{R_1}{h} + i - 1)} = \frac{1}{2(\frac{R_1}{h} + i - 1)}$. Так как $h = \frac{R_2 - R_1}{MM}$, имеем

$$\left(\frac{1}{2(\frac{R_1}{h} + i - 1)}\right)_{\max} = \frac{1}{\frac{2R_1 \cdot MM}{R_2 - R_1}} = \frac{R_2 - R_1}{2R_1 \cdot MM} = \frac{h}{2R_1} < 1, \text{ поскольку шаг } h \text{ из}$$

соображений обеспечения аппроксимации всегда меньше $2R_1$.

$$b = 1 - \frac{2a \cdot \Delta t}{h^2} > 0, \text{ или } \Delta t < \frac{h^2}{2a}. \quad (2.246)$$

Выражение (2.246) является необходимым условием устойчивости схемы (2.242).

Таким образом, явная схема является условно сходящейся. Для обеспечения ее устойчивости при изменении сетки (уменьшении h) необходимо в соответствии с (2.246) уменьшить шаг по времени, что существенно увеличивает трудоемкость расчетов.

Неявная схема, когда температуры в правой части уравнения (2.241) отнесены к следующему моменту времени ($k+1$), является безусловно устойчивой. Она является устойчивой при любом соотношении Δt и h . Однако обеспечение устойчивости применяемых расчетов по методу прогонки [21] также требует применения шагов по времени, ограниченных некоторыми минимальными значениями.

Рассмотренные выше граничные условия первого рода аппроксимируются при МКР абсолютно точно. Для аппроксимации более сложных граничных условий применяют специальные методы, с которыми целесообразно ознакомиться на практических занятиях.

Конечно-разностная аппроксимация задач по исследованию затвердевания отливок

Рассмотрим методику применения МКР для анализа затвердевания отливок классических конфигураций. Схема отливки, затвердевающей в литейной форме, показана на рис. 2.45.

Приняв $\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{H_i^{k+1} - H_i^k}{\Delta t}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = \frac{U_{i+1}^k - 2U_i^k + U_{i-1}^k}{h_1^2}$ и $\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{U_{i+1}^k - U_{i-1}^k}{2h_1}$,

приводим уравнение (2.180) к следующей конечно-разностной схеме:

$$\frac{H_i^{k+1} - H_i^k}{\Delta t} = \frac{U_{i+1}^k - 2U_i^k + U_{i-1}^k}{h_1^2} + \frac{k(U_{i+1}^k - U_{i-1}^k)}{2(i-1) \cdot h_1^2}, \text{ или при } 1 < i < M$$

$$H_i^{k+1} = H_i^k - \frac{2\Delta t}{h_1^2} U_i^k + U_{i+1}^k \cdot \frac{\Delta t}{h_1^2} \left(1 + \frac{k}{2(i-1)}\right) +$$

$$+ U_{i-1}^k \left(1 - \frac{k}{2(i-1)}\right) \cdot \frac{\Delta t}{h_1^2}. \quad (2.247)$$

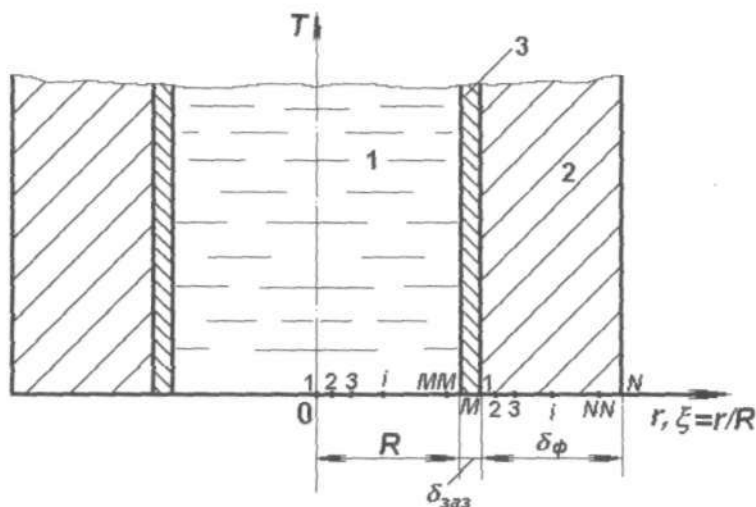


Рис. 2.45. Схема отливки, затвердевающей в литейной форме:
1 - жидкий сплав; 2 - форма; 3 - воздушный зазор

Примем в первом приближении, что теплофизические свойства формы не зависят от температуры. С учетом этого $H_2 = c_2 \cdot \rho_2 \cdot T_2$ и $U_2 = \lambda_2 T_2$. Уравнение (2.181) для стенки формы принимает вид

$$c_2 \cdot \rho_2 \cdot \frac{\partial T_2}{\partial t} = \lambda_2 \left(\frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} + \frac{k}{r} \cdot \frac{\partial T_2}{\partial r} \right), \text{ или } \frac{\partial T_2}{\partial t} = a_2 \left(\frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} + \frac{k}{r} \cdot \frac{\partial T_2}{\partial r} \right). \quad (2.248)$$

Примем

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} \approx \frac{T_{2i}^{k+1} - T_{2i}^k}{\Delta t}; \quad \frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} = \frac{T_{2i+1}^k - 2T_{2i}^k + T_{2i-1}^k}{h_2^2}; \quad \frac{\partial T_2}{\partial r} = \frac{T_{2i+1}^k - T_{2i-1}^k}{2h_2}.$$

Тогда из уравнения (2.248) после преобразований при $1 < i < N$ находим

$$\begin{aligned} T_{2i}^{k+1} = & T_{2i}^k \left(1 - \frac{2a_2 \Delta t}{h_2^2}\right) + T_{2i+1}^k \left(1 + \frac{k}{2\left(\frac{R}{h_2} + i - 1\right)}\right) \cdot \frac{a_2 \Delta t}{h_2^2} + \\ & + T_{2i-1}^k \left(1 - \frac{k}{2\left(\frac{R}{h_2} + i - 1\right)}\right) \cdot \frac{a_2 \Delta t}{h_2^2}. \end{aligned} \quad (2.249)$$

Нетрудно убедиться, что уравнения (2.180) и (2.181) инвариантны по отношению к преобразованиям переменных $\xi = \frac{r}{R}$ и $\eta = \frac{t}{R^2}$. Рекомендуем читателю самостоятельно убедиться в том, что уравнения (2.180) и (2.181) при этом принимают вид

$$\frac{\partial H}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{k}{\xi} \cdot \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad 0 < \xi < 1; \quad (2.250)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial \eta} = a \left(\frac{\partial^2 T_2}{\partial \xi^2} + \frac{k}{\xi} \cdot \frac{\partial T_2}{\partial \xi} \right), \quad 1 < \xi < 1 + \frac{\delta_\phi}{R}. \quad (2.251)$$

Приведенные выше конечно-разностные уравнения (2.247) и (2.249) для расчета температур во внутренних точках отливок и формы применимы для аппроксимации уравнений (2.250) и (2.251), если под h_1 и h_2 пони-

мать шаги по координате $\xi = \frac{x}{R}$ в отливке и стенке формы, вычисленные

по следующим формулам: $h_1 = \frac{R}{MM \cdot R} = \frac{1}{MM}$ и $h_2 = \frac{\delta_\phi}{NN \cdot R}$, где MM

и NN – соответственно число слоев при разбиении половины толщины стенки или радиуса отливки и стенки формы.

К уравнениям (2.250) и (2.251) необходимо присоединить конечно-разностные уравнения, аппроксимирующие граничные условия (2.182)–

(2.185). Для аппроксимации граничных условий справедливы следующие уравнения (предлагаем читателю вывести их самостоятельно):

1) условие на оси отливки ($x=0, \xi=0, i=1$)

$$H_1^{k+1} = H_1^k + U_2^k \cdot \frac{2\Delta\eta}{h_1^2} - \frac{2\Delta\eta}{h_1^2} \cdot U_1^k; \quad (2.252)$$

2) условие на наружной поверхности формы ($x=R+\delta_\phi; \xi = 1 + \frac{\delta_\phi}{R}; i=N$)

$$\begin{aligned} T_{2N}^{k+1} = T_{2N}^k & \left(1 - \frac{2a_2 \cdot \Delta\eta}{h_2^2} - \frac{2\alpha_2 \cdot R \cdot \Delta\eta \cdot a_2}{\lambda_2 h_2} - \frac{a_2 \cdot k \cdot \alpha_2 \cdot R \cdot \Delta\eta}{\lambda_2 \left(1 + \frac{\delta_\phi}{R}\right)} \right) + \\ & + \frac{2a_2 \cdot \Delta\eta}{h_2^2} \cdot T_{2NN}^k + T_{cp}^k \left(\frac{2\alpha_2 \cdot R \cdot a_2 \cdot \Delta\eta}{\lambda_2 h_2} + \frac{a_2 \cdot k \cdot \alpha_2 \cdot R \cdot \Delta\eta}{\lambda_2 \left(1 + \frac{\delta_\phi}{R}\right)} \right); \quad (2.253) \end{aligned}$$

3) условия на границе отливка–форма ($x=R, \xi=1$):

- для литья в металлические формы:

$$\begin{aligned} H_M^{k+1} = H_M^k + U_{1MM}^k \cdot \frac{2 \cdot \Delta\eta}{h_1^2} - U_{1M}^k \cdot \frac{2\Delta\eta}{h_1^2} - T_{1M}^k & \left(\frac{2\alpha_1 \cdot R}{h_1} + \right. \\ & \left. + k \cdot \alpha_1 \cdot R \right) \cdot \Delta\eta + T_{21}^k \left(\frac{2\alpha_1 \cdot R}{h_1} + k \cdot \alpha_1 \cdot R \right) \Delta\eta; \quad (2.254) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{21}^{k+1} = T_{21}^k & \left(1 - \frac{2a_2 \cdot \Delta\eta}{h_2^2} - \frac{2\alpha_1 \cdot R \cdot a_2 \cdot \Delta\eta}{h_2 \lambda_2} + \frac{k \cdot \alpha_1 \cdot R \cdot a_2 \cdot \Delta\eta}{\lambda_2} \right) + \\ & + \frac{2a_2 \cdot \Delta\eta}{h_2^2} T_{22}^k + T_{1M}^k \left(\frac{2\alpha_1 \cdot R \cdot a_2 \cdot \Delta\eta}{h_2 \lambda_2} - \frac{k \cdot \alpha_1 \cdot R \cdot a_2 \cdot \Delta\eta}{\lambda_2} \right); \quad (2.255) \end{aligned}$$

- для литья в песчаные формы:

$$\Phi^{k+1} = \Phi^k + \frac{2(U_{1M}^k - U_{1M}^k) \cdot \Delta\eta}{h_1^2} + \frac{2(T_{22}^k - T_{21}^k)}{h_2^2} \cdot \frac{\lambda_2(k + \frac{2}{h_1})}{\frac{2}{h_2} - k} \cdot \Delta\eta, \quad (2.256)$$

где $\Phi = H_M + B \cdot T_{1M}$; $B = \frac{c_2 \cdot \rho_2(k + \frac{2}{h_1})}{\frac{2}{h_2} - k}$; $H_M^{k+1} = \Phi^{k+1} - B \cdot T_{1M}^{k+1}$;

$$T_{1M}^{k+1} = \varphi \cdot \Phi^{k+1}; \quad (2.257)$$

$$T_{21}^{k+1} = T_{1M}^{k+1}. \quad (2.258)$$

Для того чтобы замкнуть конечно-разностное описание задачи, необходимо к системе уравнений (2.250)–(2.257) присоединить начальные условия $T_{1i}^k (1 \leq i \leq M) = T_{10}$, $T_{2i}^{k=0} (1 \leq i \leq M) = T_{20}$ и конкретный для данного случая вид функций $H(T_1)$, $U(T_1)$, $U(H)$, $\Phi(T_1)$, $T_1(\Phi)$ и $T_1(U)$.

При литье в песчаные формы начальные условия задаются иначе, так как в месте контакта отливки и формы мгновенно формируется общая для

сплава и формы температура $T_k = T_{20} + (T_{10} - T_{20}) \cdot \frac{b_2}{b_1 + b_2}$, где

$b_2 = \sqrt{\lambda_2 \cdot c_2 \cdot \rho_2}$ и $b_1 = \sqrt{\lambda_{жс} \cdot c_{жс} \cdot \rho_{жс}}$ – коэффициенты аккумуляции тепла формой и жидким сплавом. Начальные условия записываются следующим образом:

$$T_{1i}^{k=0} (1 \leq i < M) = T_{10}; \quad T_{2i}^{k=0} (1 < i \leq M) = T_{20}; \quad T_{1M}^{k=0} = T_k;$$

$$\Phi^{k=0} = H_1(T_k) + B \cdot T_k; \quad T_{21}^{k=0} = T_{1M}^{k=0} = T_k.$$

Для расчета функций $U_1(T)$ сплавов типа твердых растворов, эвтектических сплавов и чистых металлов выше приведены формулы (2.145)–(2.160) и (2.186). Функции $T_1(U_1)$ и $T_1(\Phi)$ легко найти, обратив для каждого температурного интервала функции $U(T_1)$ и $\Phi(T_1)$. Функцию $\Phi(T_1)$ нетрудно получить, прибавляя к каждому из выражений в правых частях формул (2.145)–(2.158) для вычисления $H(T_1)$ величину BT_1 .

Функцию $U(H)$, необходимую для определения функции U_i^{k+1} по значениям функции H_i^{k+1} , рассчитанным по приведенным выше конечно-разностным уравнениям, легко получить, подставив выражение для T_1 , введенное из соответствующей формулы для H , в функцию $U(T_1)$.

Применение метода конечных разностей для краевых задач затвердевания в двумерном и трехмерном представлении сопряжено с большими затратами машинного времени, особенно для реальных отливок.

2.3.2. Метод потоков

Метод потоков разработан школой академика О.Н. Белоцерковского. Он основан на разбиении области, занятой системой, на ячейки различной конфигурации и применении для каждой ячейки интегральных законов изменения внутренней энергии и импульса.

Как показала практика применения метода, он обеспечивает выполнение расчетов с меньшими, чем при МКР и МКЭ, затратами времени. Особенно эффективно его применение при решении сопряженных задач тепломассопереноса. Поясним сущность метода применительно к затвердеванию плоской отливки в металлической форме (рис. 2.46).

Пространство, занятое отливкой и формой, разбивается на прямоугольные ячейки со сторонами HY и HX . Нумерация ячеек отнесена к их центрам. Ряд соседних ячеек показан на рис. 2.47.

Половина толщины стенки отливки разбивается на M вертикальных рядов, а толщина стенки формы – на MF рядов. В вертикальном направлении высота отливки разбивается на N ячеек, а стенка формы – на NF ячеек. Уравнение изменения энергии ячейки имеет вид

$$\frac{d \int_V H dV}{dt} = - \oint_S \Pi_E dS, \quad (2.259)$$

где H – теплосодержание единицы объема;

Π_E – поток энергии через поверхность S , ограничивающую объем ячейки V .

Для сплава при температуре в ячейке T_{ij} , большей температуры нулевой жидкотекучести $T_{н.жс}$, $\Pi_E = H v_i \frac{\partial U}{\partial x_i}$; для сплава при T_{ij} , меньшей $T_{н.жс}$ и

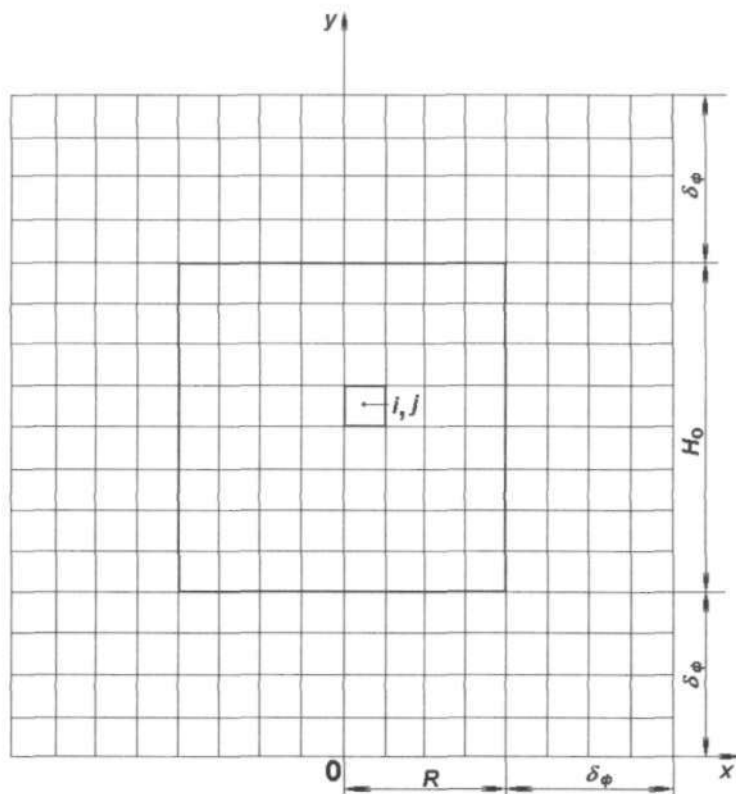


Рис. 2.46. Схема для расчета затвердевания отливки по методу потоков

температуры стенки формы, $\Pi_E = -\frac{\partial U}{\partial x_i}$, где x_i – i -я координата (x или y); v_i – i -я компонента скорости сплава, вызванной естественной конвекцией;

$U = \int_0^T \lambda \cdot dT$ – функция Гудмена.

Уравнение изменения импульса жидкого сплава в ячейке (при $T_{ij} \geq T_{н.жс}$) имеет вид

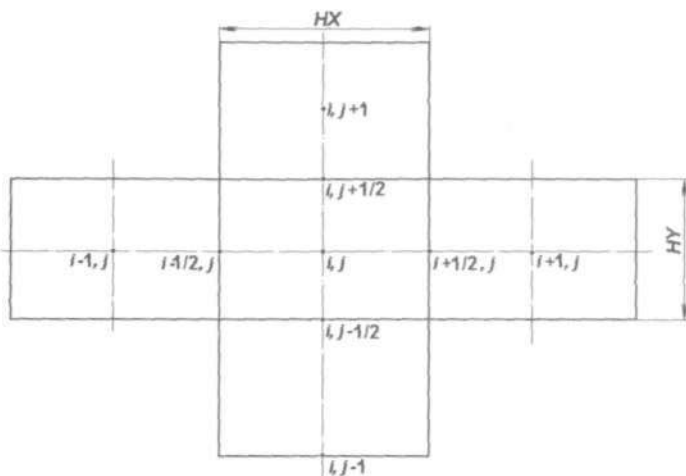


Рис. 2.47. Схема соседних ячеек

$$\frac{\partial \int_V \rho \cdot v_i \cdot dV}{\partial t} = - \oint_S \Pi_{ik} \cdot dS_k + f_i, \quad (2.260)$$

где ρ – плотность жидкого сплава;

$$f_{i=y} = -\rho g (1 + \alpha_t (T_{10} - T_y)) \cdot \Delta V;$$

α_t – термический коэффициент объемного расширения жидкого сплава;

T_{10} – начальная температура сплава;

Π_{ik} – поток импульса через поверхность S , ограничивающую ячейку.

$$\Pi_{ik} \cdot dS_k = (\rho \cdot v_{ik} \cdot v_k - \sigma_{ik}) \cdot n_k \cdot dS,$$

где n_k – единичный вектор нормали к поверхности S ;

$$\sigma_{ik} \text{ – компонент тензора напряжений, } \sigma_{ik} = -p \cdot \delta_{ik} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right);$$

p – давление на поверхности ячейки;

μ – динамический коэффициент вязкости сплава.

Так как жидкий сплав несжимаем, то дивергенция скорости равна нулю: $\text{Div} \vec{v} = \frac{1}{V} \int_V \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0$. При использовании метода потоков скоро-

сти, давления и температуры относят к центру ячейки; принимается, что в объеме ячейки они одинаковы. Значения величин и производные вычисляются на поверхностях ячейки по линейным аппроксимирующим формулам. Например,

$$\begin{aligned} v_{i+1/2,j} &= \frac{v_{i+1,j} + v_{i,j}}{2}; \quad v_{i-1/2,j} = \frac{v_{i,j} + v_{i-1,j}}{2}; \quad v_{i,j+1/2} = \frac{v_{i,j+1} + v_{i,j}}{2}; \\ v_{i,j-1/2} &= \frac{v_{i,j} + v_{i,j-1}}{2}; \quad p_{i,j+1/2} = \frac{p_{i,j} + p_{i,j+1}}{2}; \quad p_{i,j-1/2} = \frac{p_{i,j} + p_{i,j-1}}{2}; \\ p_{i-1/2,j} &= \frac{p_{i-1,j} + p_{i,j}}{2}; \quad p_{i+1/2,j} = \frac{p_{i+1,j} + p_{i,j}}{2}; \quad \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)_{i+1/2,j} = \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{HX}; \\ \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)_{i-1/2,j} &= \frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{HX}. \end{aligned}$$

Расчет начинают с вычисления компонент импульса $\vec{K}$ и скоростей в ячейке на следующем шаге по времени. Расчетные формулы, аппроксимирующие уравнение (2.260), имеют вид

$$\begin{aligned} K_x^{k+1} &= K_x^k - \Delta t(((\rho v_x v_x)_{i+1/2,j} - (\sigma_{xx})_{i+1/2,j} - (\rho v_x v_x)_{i-1/2,j} + \\ &+ (\sigma_{xx})_{i-1/2,j})) \cdot HX + ((\rho v_y v_x)_{i,j+1/2} - (\sigma_{xy})_{i,j+1/2} - (\rho v_y v_x)_{i,j-1/2} + \\ &+ (\sigma_{xy})_{i,j-1/2})) \cdot HY; \end{aligned} \quad (2.261)$$

$$\begin{aligned} K_y^{k+1} &= K_y^k - \Delta t(((\rho v_x v_y)_{i+1/2,j} - (\sigma_{xy})_{i+1/2,j} - (\rho v_x v_y)_{i-1/2,j} + \\ &+ (\sigma_{xy})_{i-1/2,j})) \cdot HX + ((\rho v_y v_y)_{i,j+1/2} - (\sigma_{yy})_{i,j+1/2} - (\rho v_y v_y)_{i,j-1/2} + \\ &+ (\sigma_{yy})_{i,j-1/2})) \cdot HY - \Delta t \cdot HX \cdot HY \cdot \rho G(1 + \alpha_i(T_{i0} - T(t))); \end{aligned} \quad (2.262)$$

$$v_x^{k+1} = \frac{K_x^{k+1}}{\rho \cdot HX \cdot HY}; \quad v_y^{k+1} = \frac{K_y^{k+1}}{\rho \cdot HX \cdot HY}. \quad (2.263)$$

С учетом найденных значений v_x^{k+1} и v_y^{k+1} вычисляют значения дивергенции в ячейках: $Div \vec{v} = \frac{v_{x,i+1/2} - v_{x,i-1/2}}{HX} + \frac{v_{y,i,j+1/2} - v_{y,i,j-1/2}}{HY}$. Если наибольшее по модулю значение $Div \vec{v}$ превышает некоторое малое, близ-

кое к нулю значение DM (например, 0,001), то необходимо по рекуррентной формуле $p^{n+1} = p^n - B \cdot \text{Div} \vec{v}$ вычислить новые значения давлений в ячейках и с их учетом снова выполнить расчет полей скоростей по формулам (2.261)–(2.263). Эти расчеты выполняют до тех пор, пока во всех ячейках не будет соблюдаться условие $\text{Div} \vec{v} < DM$.

Далее переходят к расчету значений внутренней энергии в ячейках на следующем шаге по времени E_{ij}^{k+1} . Уравнение, аппроксимирующее выражение (2.259), имеет вид

$$\begin{aligned} E_{ij}^{k+1} = & E_{ij}^k - \Delta t \left((Hv_x)_{i+1/2,j} - \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{i+1/2,j} - (Hv_x)_{i-1/2,j} + \right. \\ & + \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{i-1/2,j} \cdot HX + ((Hv_y)_{i,j+1/2} - \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{i,j+1/2} - \\ & \left. - (Hv_y)_{i,j-1/2} + \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{i,j-1/2} \right) \cdot HY. \end{aligned} \quad (2.264)$$

По найденным значениям E_{ij} находят значения функции

$H_{ij} = \frac{E_{ij}}{HX \cdot HY}$. С учетом зависимостей $U(H)$ и $T(U)$ для данного сплава рассчитывают значения U_{ij} и T_{ij} .

Приведенные уравнения в отличие от конечно-разностных содержат только первые производные по координатам. Поэтому условия устойчивости расчета здесь менее жесткие, что определяет большую скорость расчетов даже для трехмерных задач. В зависимости от конфигурации отливки можно выбирать различные конфигурации ячеек. Метод потоков позволяет относительно легко решать задачи с подвижными границами, например, при заполнении формы сплавом.

2.3.3. Метод конечных элементов

Метод конечных элементов характеризуется двумя особенностями. Во-первых, рассматриваемая область разбивается на произвольные элементы (треугольные, четырехугольные, тетраэдры, конусы и т.п.), в том числе и с криволинейными поверхностями. Это позволяет максимально приблизить расчетную область к конфигурации отливки. Во-вторых, в процессе выполнения расчетов определяются значения температур в узло-

вых точках (вершинах) элементов. Значения температур во внутренних точках элементов выражаются через узловые значения с помощью различных полиномиальных зависимостей. Расчет основан на определении значений температур, минимизирующих невязку расчетов.

Напишем уравнение теплопроводности

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial(\lambda \frac{\partial T}{\partial x})}{\partial x} + \frac{\partial(\lambda \frac{\partial T}{\partial y})}{\partial y} + \frac{\partial(\lambda \frac{\partial T}{\partial z})}{\partial z}.$$

Обозначим приближенную функцию для температуры $\Phi(t, x, y, z)$. Невязку $R(\Phi)$ можно найти по формуле

$$R(\Phi) = c\rho \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\partial(\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial x})}{\partial x} - \frac{\partial(\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial y})}{\partial y} - \frac{\partial(\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial z})}{\partial z}.$$

В соответствии с методом Галеркина невязка $R(\Phi)$ будет наименьшей, если подобрана система весовых функций W_i , при которой выполняется условие $\int_V W_i R(\Phi) \cdot dV = 0$.

Теория метода отличается сложностью. Имеется ряд типовых программ, основанных на МКЭ. Отработке практических навыков пользования ими можно посвятить ряд практических занятий. Следует отметить, что МКЭ сводится к решению линейных и нелинейных алгебраических систем большой размерности (при большом числе элементов), что сопряжено со значительной трудоемкостью расчетов.

Контрольные вопросы и задания

1. Назовите основные задачи теории затвердевания.
2. Напишите математическую формулировку задачи Стефана.
3. Приведите решение задачи Стефана.
4. Выполните решение задачи Шварца.
5. Сформулируйте закон «квадратного корня» при затвердевании и назовите условия его применимости.
6. Сделайте вывод формул для расчета константы затвердевания в законе «квадратного корня».

7. Поясните метод Н.И. Хворинова.
8. Сформулируйте правила приведенной толщины стенки отливки и назовите условия их применимости.
9. Сделайте вывод формул для расчета кинетики затвердевания цилиндрических и сферических отливок с использованием правила приведенной толщины стенки отливки.
10. Напишите математическую модель затвердевания плоской отливки в песчаной форме.
11. Напишите математическую модель затвердевания цилиндрической отливки в песчаной форме.
12. Напишите математическую модель затвердевания сферической отливки в песчаной форме.
13. Приведите краевую задачу затвердевания плоской отливки в металлической форме.
14. Приведите краевую задачу затвердевания цилиндрической отливки в металлической форме.
15. Приведите краевую задачу затвердевания сферической отливки в металлической форме.
16. Сформулируйте метод Г.Ф. Баландина для расчета продолжительности затвердевания отливок в песчаных формах.
17. Сформулируйте метод Ю.А. Нехендзи–Н.Г. Гиршовича для расчета продолжительности затвердевания отливок в песчаных и металлических формах.
18. Сформулируйте метод А.И. Вейника для расчета продолжительности затвердевания кокильных отливок.
19. Расскажите о преобразованиях Кирхгофа и Гудмена H и U и о их применении для упрощения нелинейного уравнения теплопроводности.
20. Напишите формулировку краевой задачи затвердевания отливок классических конфигураций в металлических формах в переменных $\xi = \frac{x}{R}$,

$$\eta = \frac{t}{R^2} \text{ и функциях } U(T), H(T).$$

21. Напишите формулы для вычисления функции $U(T)$ в разных температурных интервалах. Приведите график этой функции.
22. Напишите формулы для вычисления функции $H(T)$ для сплавов с эвтектическим превращением.
23. Напишите формулы для вычисления функции $H(T)$ для сплавов типа твердых растворов.
24. Дайте понятие об интегральной и спектральной теплотах кристаллизации.

25. Приведите конечно-разностную аппроксимацию производных $\frac{\partial T}{\partial t}$, $\frac{\partial T}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$.
 26. Поясните сущность метода конечных разностей.
 27. Расскажите о конечно-разностном представлении уравнения теплопроводности Фурье.
 28. Приведите конечно-разностные уравнения, аппроксимирующие уравнения теплопроводности для сплава и формы.
 29. Объясните механизм возникновения газового зазора между отливкой и формой при литье в металлические формы.
 30. Поясните сущность метода конечных разностей.
 31. Дайте понятие об устойчивости разностных схем.
 32. Поясните условия устойчивости уравнений, аппроксимирующих уравнения теплопроводности для отливки и формы.
 33. Поясните, как выбираются шаги интегрирования.
 34. В вариантах 1–10 выполните расчет продолжительности затвердевания отливок классических конфигураций из различных сплавов в песчаных и металлических формах по разным методам. Исходные данные приведены в табл. 2.13.
- В вариантах 11–20 и 21–30 выполните аналогичные расчеты для протяженных отливок прямоугольного (рис. 2.48, а) и таврового (рис. 2.48, б) сечений. Исходные данные для расчетов приведены в табл. 2.14 и 2.15.
- В вариантах 21–30 для литья в песчаные формы выполните расчеты по методам Н.И. Хворина, Г.Ф. Баландина и Ю.А. Нехендзи–Н.Г. Гиршовича. При литье в металлические формы примените методы А.И. Вейника и Ю.А. Нехендзи–Н.Г. Гиршовича.
- Необходимые для расчетов теплофизические характеристики возьмите из справочной литературы.

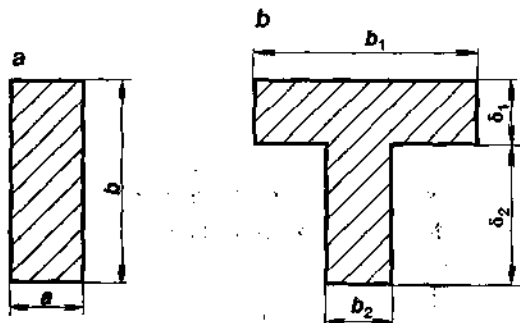


Рис. 2.48. Формы сечений отливок для вариантов:
а – 11–20; б – 21–30

Таблица 2.13

Исходные данные для вариантов 1–10

Номер вар.	Конфигурация отливки	Материал формы	$T_{10}, ^\circ\text{C}$	$T_{20}, ^\circ\text{C}$	Сплав	$R, \text{см}$	$\delta_f, \text{см}$	$\lambda_{кр}, \frac{\text{Вт}}{\text{см}\cdot\text{К}}$	$\delta_{кр}, \text{см}$	Метод расчета
1	Плита	Песчаная	1600	20	Сталь	5	15	—	—	Хворина
2	Плита	Песчаная	1350	20	Чугун	8	24	—	—	Баландина
3	Плита	Чугун	750	200	АК7ч	3	9	0,0033	0,01	Вейника
4	Цилиндр	Песчаная	1650	20	Сталь	5	16	—	—	Хворина
5	Цилиндр	Песчаная	1400	20	Чугун	8	24	—	—	Баландина
6	Цилиндр	Чугун	700	200	АК7ч	3	9	0,0033	0,01	Гиршовича-Нехендзи
7	Шар	Песчаная	1600	20	Сталь	5	15	—	—	Баландина
8	Шар	Чугун	700	200	АК7ч	3	9	0,0033	0,01	Вейника
9	Шар	Песчаная	1350	20	Чугун	8	24	—	—	Хворина
10	Плита	Песчаная	750	20	АЛ5	4	12	—	—	Нехендзи

Таблица 2.14

Исходные данные для вариантов 11–20

Номер вар.	Материал формы	Сплав	$T_{10}, ^\circ\text{C}$	$T_{20}, ^\circ\text{C}$	$\delta, \text{см}$	$b, \text{см}$	$\delta_f, \text{см}$	$\lambda_{кр}, \frac{\text{Вт}}{(\text{см}\cdot\text{К})}$	$\delta_{кр}, \text{см}$	Метод расчета
11	Песчаная	Сталь	1610	20	4	8	6	—	—	Хворина
12	Песчаная	Чугун	1350	20	3	6	5	—	—	Баландина
13	Чугун	Силумин	750	200	2	4	3	0,0033	0,01	Вейника
14	Песчаная	Сталь	1650	20	5	15	8	—	—	Баландина
15	Песчаная	Чугун	1400	20	4	12	6	—	—	Хворина
16	Чугун	Силумин	700	200	3	9	5	0,0050	0,01	Гиршовича-Нехендзи
17	Песчаная	Сталь	1600	20	4	12	6	—	—	Баландина
18	Песчаная	Чугун	1350	20	3	9	5	—	—	Хворина
19	Чугун	Силумин	700	200	2	6	8	0,0033	0,01	Вейника
20	Песчаная	АЛ5	750	20	1	3	2	—	—	Баландина

Таблица 2.15

Исходные данные для вариантов 21–30*

Номер вар.	Материал формы	Сплав	$T_{10}, ^\circ\text{C}$	$T_{20}, ^\circ\text{C}$	$\delta_1, \text{см}$	$\delta_2, \text{см}$	$\delta_f, \text{см}$	$\lambda_{кр}, \frac{\text{Вт}}{(\text{см}\cdot\text{К})}$	$l_1, \text{см}$	$l_2, \text{см}$
21	Песчаная	Сталь	1600	20	3	4	6	—	9	4
22	Песчаная	Чугун	1350	20	4	4	6	—	12	4
23	Чугун	Силумин	750	200	2	3	5	0,0033	6	3
24	Песчаная	Сталь	1650	20	4	5	8	—	12	5
25	Песчаная	Чугун	1400	20	5	5	8	—	15	5
26	Чугун	Силумин	700	150	3	3	5	0,0050	9	3
27	Песчаная	Сталь	1600	20	4	3	5	—	12	3
28	Песчаная	Чугун	1350	20	3	4	6	—	8	4
29	Чугун	Силумин	700	150	1	2	3	0,0033	3	2
30	Песчаная	АЛ5	750	20	2	3	5	—	6	3

* Для вариантов 23, 26, 29 $\delta_{кр}=0,01 \text{ см}$.

РАЗДЕЛ 3. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ФОРМИРОВАНИЯ КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ ОТЛИВОК

Среди литейных процессов центральное место занимает переход сплава из жидкого в твердое кристаллическое состояние. Этот процесс является фазовым переходом первого рода, связанным с изменением объема, теплосодержания и энтропии. При рассмотрении данного процесса можно выделить два аспекта: количественный и качественный. Количественный аспект составляет содержание рассмотренной выше теории затвердевания, главной задачей которой является разработка методов расчета кинетики выделения твердой фазы в объеме расплава. Качественный аспект направлен на рассмотрение вопросов формирования кристаллической структуры отливок и методов управления ею.

Глава 1. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ САМОПРОИЗВОЛЬНОЙ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ МЕТАЛЛОВ И СПЛАВОВ

Современная теория формирования кристаллической структуры отливок создана за последние 30 лет на основе распространения элементарной теории кристаллизации металлов и сплавов на большие объемы неизотермически затвердевающих расплавов.

Жидкий металл переходит в твердое состояние в соответствии с общими законами термодинамики. Как известно, самопроизвольно протекают те процессы, в которых уменьшается свободная энергия и энергия Гиббса G . На рис. 3.1 приведены кривые изменения энергии Гиббса твердого и жидкого металла в зависимости от изменения температуры. Видно, что при температуре, большей $T_{пл}$, $G_{ж} < G_{тв}$ и устойчивым является жидкое состояние металла. При $T < T_{пл}$ $G_{тв} < G_{ж}$, поэтому устойчивым является твердое состояние. Температура $T = T_{пл}$, при которой $G_{тв} = G_{ж}$, называется *температурой плавления*. При равновесном процессе перехода из жидкого состояния в твердое эта температура соответствует равновесной температуре кристаллизации сплава $T_{кр}$. При снижении температуры ниже $T_{кр}$ возникает переохлаждение $\Delta T = T_{кр} - T$. Так как при этом $G_{ж} > G_{тв}$, то создаются термодинамические предпосылки для перехода из жидкого состояния в твердое, т.е. для кристаллизации. Движущей силой этого процесса будет разность энергий Гиббса $\Delta G = G_{ж} - G_{тв}$. Преобразуем это выражение, прибавив и отняв энергии Гиббса жидкой и твердой фаз при $T = T_{кр}$.

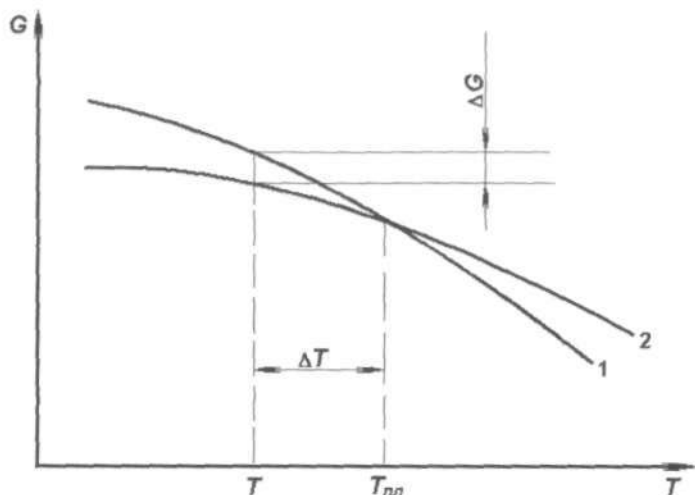


Рис. 3.1. Зависимость энергии Гиббса от температуры:
1 – жидкого металла; 2 – твердого металла

$$\Delta G = [G_{ж}(T) - G_{ж}(T_{кр})] - [G_{тв}(T) - G_{тв}(T_{кр})].$$

Так как $G_{ж}(T_{кр}) = G_{тв}(T_{кр})$, то равенство при этой операции не нарушится. Поскольку реальные переохлаждения металлов невелики, то для стоящих в квадратных скобках выражений можно написать следующие приближенные равенства:

$$G_{ж}(T) - G_{ж}(T_{кр}) = -\frac{\partial G_{ж}}{\partial T} \cdot \Delta T,$$

$$G_{тв}(T) - G_{тв}(T_{кр}) = -\frac{\partial G_{тв}}{\partial T} \cdot \Delta T.$$

С учетом этого $\Delta G = -\Delta T \left(\frac{\partial G_{ж}}{\partial T} - \frac{\partial G_{тв}}{\partial T} \right)$. Так как $\frac{\partial G}{\partial T} = -S$, то $\Delta G = +\Delta T \cdot \Delta S$, где ΔS – изменение энтропии при плавлении металла.

Как известно, $\Delta S = \frac{L}{T_{пл}}$, где L – молярная теплота плавления, следова-

тельно, $\Delta G = L \cdot \frac{\Delta T}{T_{кр}}$. Из этого выражения видно, что с ростом переохлаждения движущая сила кристаллизации увеличивается.

Следует отметить, что при кристаллизации возникает новая фаза, имеющая физическую поверхность раздела с жидкостью. Поэтому кристаллизация связана с затратами энергии на образование и рост данной поверхности раздела фаз. Величина этой энергии равна $E_S = \sigma_{к-жс} \cdot S$, где $\sigma_{к-жс}$ – межфазная энергия на границе раздела фаз; S – поверхность растущего кристалла. В результате образования кристалла объемом V с поверхностью S энергия системы уменьшится на величину ΔG_V и увеличится на величину E_S . Поэтому изменение суммарной энергии Гиббса будет равно

$$\Delta G_{\Sigma} = -\Delta G_V + E_S = -\frac{L \cdot \Delta T \cdot \rho V}{T_{кр} \cdot M} + \sigma_{к-жс} \cdot S,$$

где ρ и M – плотность твердого металла и его молярная масса.

Анализ характера зависимости ΔG_{Σ} от объема кристалла V показывает, что она имеет экстремальный характер. Характер зависимости ΔG_{Σ} от радиуса зародыша показан на рис. 3.2.

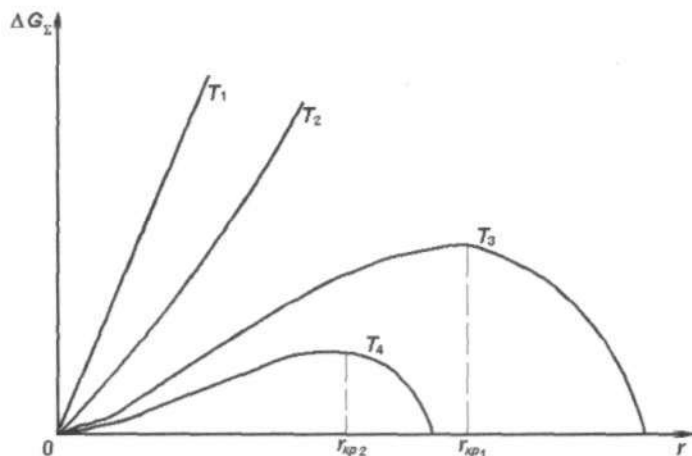


Рис. 3.2. Зависимость ΔG_{Σ} от радиуса зародыша r при разных температурах ($T_1 > T_2 > T_{кр} > T_3 > T_4$)

В курсе металловедения получено следующее выражение для определения критического размера сферического зародыша, обеспечивающего максимум ΔG_{Σ} (читателю предлагается вывести его самостоятельно):

$$r_{кр} = \frac{2\sigma_{\text{т-жс}} \cdot T_{кр} \cdot M}{\rho L \cdot \Delta T}.$$

На рис. 3.2 видно, что с понижением температуры, т.е. с увеличением переохлаждения, радиус критического зародыша становится меньше ($r_{кр2} < r_{кр1}$). При этом уменьшается и энергия образования критического зародыша:

$$\Delta G_{кр} = \frac{16\pi \cdot M^2 \cdot T_{пл}^2 \cdot \sigma_{\text{к-жс}}^3}{3L^2 \cdot \rho^2 \cdot \Delta T^2} = \frac{1}{3} E_{Sкр},$$

где $E_{Sкр}$ – поверхностная энергия зародыша критических размеров.

Пусть по каким-либо причинам в расплаве при данном переохлаждении возник зародыш радиуса $r < r_{кр}$. Рост такого зародыша (увеличение r), как видно на рис. 3.2, сопровождается ростом ΔG_{Σ} . Поэтому данный зародыш не способен к росту и будет расплавляться. Если радиус зародыша $r \geq r_{кр}$, то при присоединении к нему даже одного атома, т.е. с ростом его размеров, ΔG_{Σ} будет убывать. Поэтому данный зародыш сможет расти.

Зародыш, способный к росту, называется *центром кристаллизации*. Критический зародыш ($r = r_{кр}$) еще не является центром кристаллизации: он может потерять хотя бы одну частицу, т.е. стать дозародышем ($r < r_{кр}$) и исчезнуть, или присоединить хотя бы одну частицу ($r > r_{кр}$) и получить возможность для роста, т.е. стать центром кристаллизации. Поэтому вероятность образования центра кристаллизации равна произведению вероятностей образования зародыша критических размеров p_1 и присоединения к нему частицы p_2 , т.е. $P = p_1 \cdot p_2$.

Вероятность образования центра кристаллизации равна отношению числа возникших в единицу времени в единице объема расплава центров кристаллизации n к общему числу частиц в расплаве N , т.е. $P = \frac{n}{N}$. Ве-

личина n , называемая *скоростью возникновения центров кристаллизации* (СВЦК), является важнейшей кристаллизационной характеристикой металлического расплава. Очевидно, что $n = P \cdot N = p_1 \cdot p_2 \cdot N$. Размерность $[n] = \text{м}^3 \cdot \text{с}^{-1}$.

Для того чтобы определить вероятность P_1 , рассмотрим вопрос о причинах появления зародышей в условиях возрастания суммарной энергии Гиббса ΔG_{Σ} . С точки зрения статистической физики характерные для равновесия значения термодинамических величин представляют собой лишь наиболее их вероятные при данных условиях значения. Практически отдельные микрообъемы жидкости в течение некоторых малых промежутков времени могут обладать значениями термодинамических величин, отличными от равновесного состояния. При этом большую часть времени система обладает равновесными термодинамическими характеристиками. Случайные отклонения какой-либо величины от ее равновесного значения называются *флуктуациями*. Вероятность обнаружения флуктуации зависит от ее величины. Чем больше флуктуация, т.е. отклонение от соответствующего равновесного значения, тем она менее вероятна и тем меньшее время система обладает соответствующим отличным от равновесного значением той или иной величины. Кривая зависимости вероятности флуктуации от ее величины отличается острым максимумом в области нулевых флуктуаций (рис. 3.3). Поэтому с увеличением флуктуации вероятность ее появления резко снижается до нуля.

Благодаря наличию флуктуации энергии в расплаве будет находиться то или иное количество микрообъемов, обладающее избытком энергии, необходимым для совершения работы образования зародыша критических размеров $\Delta G_{кр}$. Вероятность такой энергетической флуктуации равна

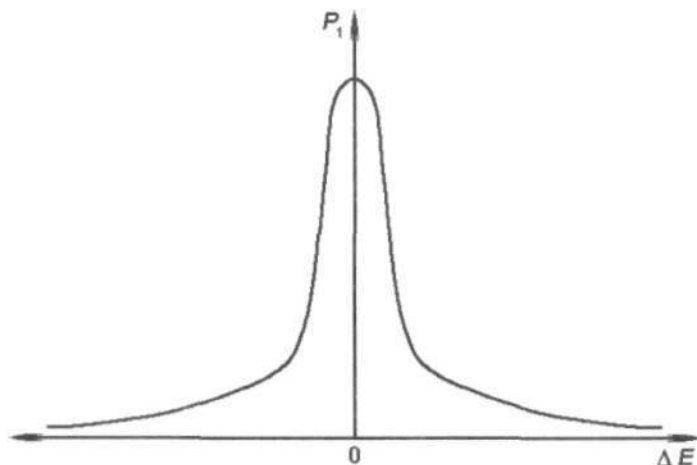


Рис. 3.3. Зависимость вероятности p_1 флуктуации энергии E от величины флуктуационного отклонения ΔE

$p_1 = \frac{n_{\kappa}}{N} = \exp\left(-\frac{\Delta G_{\kappa p}}{kT}\right)$, где n_{κ} – число зародышей критического размера; N – общее число частиц в единице объема; k – постоянная Больцмана. Вероятность p_1 и будет вероятностью возникновения зародыша критического размера в единице объема в единицу времени. Очевидно, что, чем больше $\Delta G_{\kappa p}$, тем большая требуется энергетическая флуктуация и меньше вероятность p_1 . Так как с увеличением переохлаждения ΔT $\Delta G_{\kappa p}$ уменьшается, то с ростом ΔT повышается p_1 . Вероятность присоединения к зародышу хотя бы одной частицы равна $p_2 = n_s \cdot \varepsilon v \cdot \exp\left(-\frac{U}{kT}\right)$, где n_s – число атомов в жидкости, находящихся в контакте с поверхностью зародыша; $\varepsilon = \frac{1}{6}$ – вероятность скачка атомов в данном направлении; v – частота колебаний атомов в жидкости ($v=10^{13} \cdot \text{с}^{-1}$); U – энергия активации диффузии атомов в жидкости, определяющая подвижность атомов.

Таким образом, вероятность образования центра кристаллизации равна

$$p = p_1 \cdot p_2 = n_s \cdot \varepsilon \cdot v \cdot \exp\left(-\frac{U + \Delta G_{\kappa p}}{kT}\right). \quad (3.1)$$

С учетом формулы (3.1) для вычисления скорости возникновения центров кристаллизации можно записать выражение

$$n = n_s \cdot N \cdot \varepsilon \cdot v \cdot \exp\left(-\frac{U + \Delta G_{\kappa p}}{kT}\right). \quad (3.2)$$

С увеличением переохлаждения $\Delta G_{\kappa p}$ уменьшается, а U возрастает (снижается подвижность атомов). Поэтому зависимость n от ΔT носит экстремальный характер (рис. 3.4). Подобную кривую получил впервые в начале прошлого века Г.А. Тамман при кристаллизации прозрачных органических жидкостей. Для чистых гомогенных металлических расплавов зависимость n от ΔT показана на рис. 3.5. Видно, что при переохлаждениях, меньших величины ΔT_1 , называемой *интервалом метастабильности по зарождению*, зарождение центров кристаллизации практически не происходит. Для металлов ниспадающая ветвь кривой (см. рис. 3.4) не реализуется, так как подвижность атомов в металлах очень велика.

Для чистых гомогенных металлических расплавов величина интервала метастабильности очень велика. Расчеты показывают, что $\Delta T_1 \approx 0,2T_{кр}$. Реально подобная переохлаждаемость расплавов не наблюдается, так как в расплаве всегда находится достаточное количество примесей, инициирующих зародышеобразование.

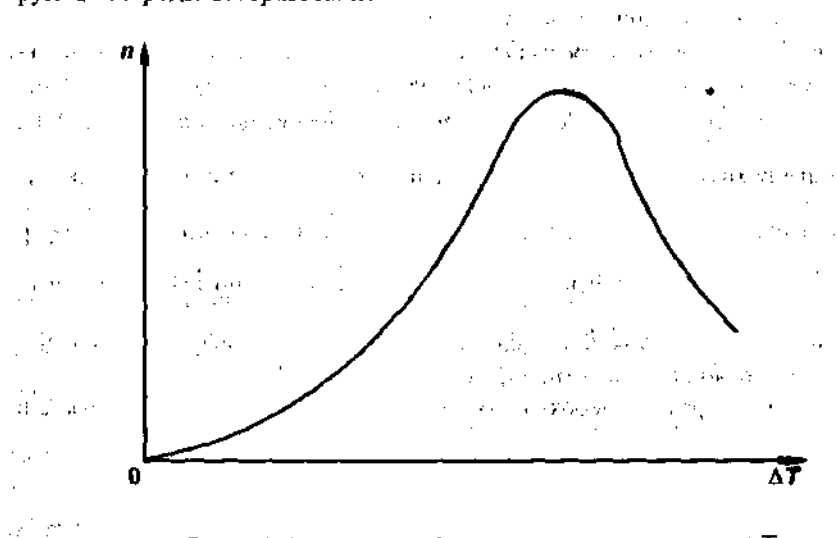


Рис. 3.4. Зависимость СВЦК n от переохлаждения ΔT

Обычно гомогенную самопроизвольную кристаллизацию изучают на мельчайших каплях чистого металла. Считается, что при измельчении металла вероятность нахождения примеси в капле уменьшается. Зависимость n от ΔT для металлов можно аппроксимировать следующей степенной зависимостью: $n = n_0(\Delta T - \Delta T_1)^5$, где показатель степени находится в интервале от 1 до 3.

Выше речь шла о самопроизвольном зарождении кристаллов при затвердевании однокомпонентных расплавов (чистых металлов). Большинство литейных расплавов являются сплавами, т.е. жидкими высокотемпературными растворами. При этом продуктами кристаллизации чаще всего являются твердые растворы. При охлаждении до температуры ликвидуса жидкий сплав оказывается насыщенным по отношению к легирующему компоненту. Поэтому при дальнейшем снижении температуры наступает пересыщение и из расплава должны выделяться твердые кристаллы.

Свойства, не зависящие от количества вещества, называются *интенсивными*. К ним относятся температура и давление. Применительно к растворам Г.Н. Льюис ввел еще одну интенсивную величину, называемую *парциально-молярной величиной компонента*. Она представляет собой ча-

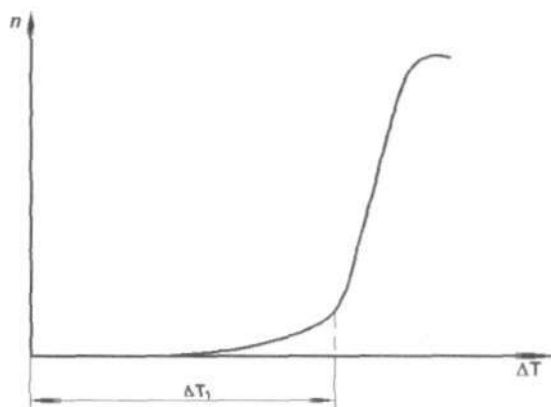


Рис. 3.5. Зависимость СВЦК от переохлаждения для чистых гомогенных металлических расплавов

стную производную от какого-либо экстенсивного свойства W по числу молей этого компонента при постоянных давлении, температуре и числе молей остальных компонентов в растворе, т.е. $\bar{q}_i = \left(\frac{dW}{dn_i}\right)_{P,T,n,j \neq i}$. Напри-

мер, парциально-молярная энергия Гиббса для i -го компонента равна

$\bar{G}_i = \left(\frac{dG}{dn_i}\right)_{P,T,j \neq i}$. Легко понять, что парциально-молярные свойства чистых веществ совпадают со значением этих свойств одного моля вещества

для заданных условий (G_A^0 и G_B^0). Действительно, для вещества

$AG = n \cdot G_A^0$ и $\frac{\partial G}{\partial n} = G_A^0$. Величина $\frac{\partial G}{\partial n_i}$ называется химическим потен-

циалом μ_i , т.е. $\mu_i = \left(\frac{\partial G}{\partial n_i}\right)_{P,T,j \neq i}$. Химический потенциал характеризует

тенденцию вещества покинуть данную фазу и перейти в другую. Физически химический потенциал равен работе, которую нужно совершить, присоединяя к раствору одну частицу данного компонента. Интенсивные величины T , P и μ_i характеризуют условия термического, механического и химического равновесия. Для равновесия необходимо, чтобы во всех фазах были одинаковые температуры, давления и химические потенциалы компонентов.

Приравняв величины μ_i для каждого компонента во всех фазах, получим систему уравнений, которая совместно с уравнениями материального баланса позволяет найти составы находящихся в равновесии фаз. Для двойных сплавов этот подход хорошо реализуется графически. На рис. 3.6 показан пример графического метода определения состава твердого раствора и находящейся с ним в равновесии при некоторой температуре T жидкой фазы. При равновесии должны выполняться условия $\mu_A^{тв} = \mu_A^{жс}$ и $\mu_B^{тв} = \mu_B^{жс}$, т.е. составы фаз должны обеспечивать выполнение равенств

$$\frac{\partial G_{жс}}{\partial n_A} = \frac{\partial G_{тв}}{\partial n_A}; \quad \frac{\partial G_{жс}}{\partial n_B} = \frac{\partial G_{тв}}{\partial n_B} \quad \text{или} \quad \frac{\partial G_{жс}}{\partial X_B} = \frac{\partial G_{тв}}{\partial X_B},$$

так как $X_A = 1 - X_B$.

Геометрически это означает, что составы определяются общей касательной к кривым зависимости энергий Гиббса твердой и жидкой фаз при данной температуре. Эти равновесные составы $C_B^{тв}$ и $C_B^{жс}$ показаны на рис.

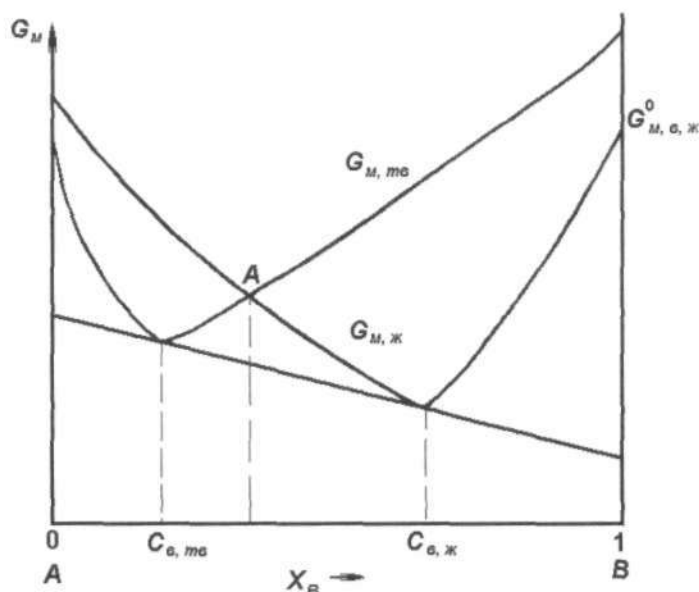


Рис. 3.6. Схема графического определения состава фаз, находящихся в равновесии при заданной темпера-

3.6. Иногда считают, что искомые составы отвечают точкам пересечения кривых мольных энергий фаз, например точке A , т.е. точкам, где равны энергии фаз. Однако равновесные фазы обеспечивают минимум суммарной энергии обеих фаз, а он достигается только при $\mu_A^{\text{жс}} = \mu_A^{\text{тв}}$ и $\mu_B^{\text{жс}} = \mu_B^{\text{тв}}$.

Таким образом, при достижении пересыщения из раствора могут выделяться твердые растворы, концентрации которых отличаются от исходной. При этом для начала процесса кристаллизации необходимо пересыщение раствора, достигаемое его переохлаждением относительно температуры ликвидуса.

Движущая сила, создающая условия для выделения твердой фазы в сплавах, определяется так же, как и для металлов, по изменению энергии Гиббса системы.

При кристаллизации сплавов вместо справедливого для однокомпонентного металла выражения $\Delta G^{\text{м}} = L \cdot \frac{\Delta T}{T_{\text{л}}}$ следует применять выраже-

ние $\Delta G_{\text{жс-а}}$. С учетом этого для определения критического размера зародыша получим выражение $r_{\text{кр}} = 2\sigma \cdot \frac{M}{\rho \cdot \Delta G_{\text{жс-а}}^{\text{м}}}$. Работа образования кри-

тического сферического зародыша равна $16\pi \cdot \frac{M^2 \cdot \sigma^3}{3\rho^2 (\Delta G_{\text{жс-а}}^{\text{м}})^2}$.

Зарождение центров кристаллизации сплавов качественно описывается той же зависимостью от переохлаждения, что и у металлов. При этом переохлаждение отсчитывается от температуры ликвидуса. Величину

$\Delta G_{\text{жс-а}}^{\text{м}}$ можно также вычислить по формуле $L \cdot \frac{\Delta T}{T_{\text{л}}}$, где L – теплота

кристаллизации, выделившаяся при кристаллизации единицы массы сплава при данной температуре.

Для образования зародышей твердых растворов необходимы не только рассмотренные выше энергетические флуктуации, но и флуктуации концентрации. Концентрационные флуктуации представляют собой участки растворов, состав которых отличается от среднего. Например, в жидком чугуна при средней концентрации углерода 3,4 % обнаруживаются участки размером 10^{-8} см, состоящие из одного углерода. По-видимому, именно эти участки являются основой возникновения зародышей графита при кристаллизации чугуна.

Рассмотренный выше процесс кристаллизации сплавов называется *диффузионным*, так как при кристаллизации в этих случаях происходит перераспределение компонентов между фазами путем диффузии.

Возможен *бездиффузионный* процесс кристаллизации сплавов, когда состав выделяющейся твердой фазы строго совпадает с составом исходно-

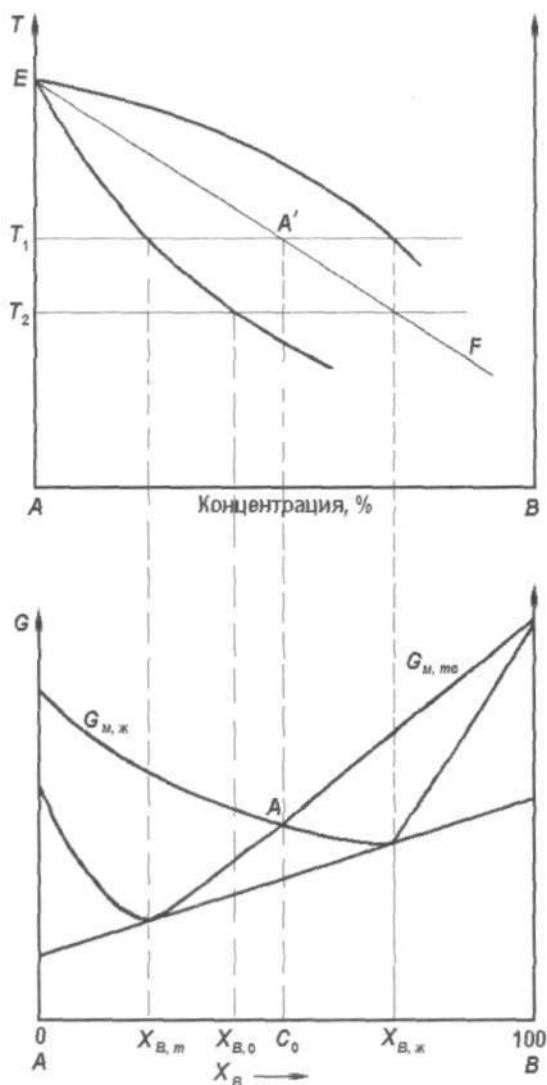


Рис. 3.7. Схема бездиффузионной кристаллизации

го жидкого сплава. На рис. 3.7 представлена диаграмма состояния и зависимость G от состава для жидкого сплава и сплава в твердом состоянии. Зависимость G приведена при $T=T_1$. Точка A отвечает равенству мольных энергий Гиббса твердой и жидкой фаз. На диаграмме состояния ей соответствует точка A' . Если аналогичные точки перенести на диаграмму при других температурах, то получим линию EF , отвечающую равенству $G_m=G_{ж}$. Если сплав резко переохладить ниже этой линии (например, до $T=T_2$), то G_m станет меньше $G_{ж}$ и произойдет бездиффузионная кристаллизация с выделением твердой фазы концентрации C_0 . Анализ показывает, что для этого нужны очень большие переохлаждения (порядка нескольких десятков и даже сотен градусов). В обычной литейной практике они не достигаются, так как требуют очень больших скоростей охлаждения при малых объемах сплава.

Глава 2. ТЕОРИЯ ГЕТЕРОГЕННОГО ЗАРОДЫШЕОБРАЗОВАНИЯ

Большинство металлов затвердевает при значительно меньшем переохлаждении, чем максимальное переохлаждение $\Delta T_{\max} = 0,2T_{кр}$, предсказываемое теорией гомогенного образования зародышей. Это обусловлено наличием в расплаве инородных твердых частиц, которые облегчают возникновение зародышей. Рассмотрим простейший случай образования зародыша на плоской поверхности включения.

Пусть зародыш ограничен частью сферической поверхности радиуса R (рис. 3.8). Изменение полной мольной энергии сплава при образовании зародыша в данном случае имеет вид

$$\Delta G_{\Sigma} = -\frac{L\Delta T V \rho}{T_{кр} M} + \sum_i \sigma_i \omega_i = -\frac{L\Delta T V \rho}{T_{кр} M} + \sigma_{2-3} \omega_{сф} + (\sigma_{1-2} - \sigma_{1-3}) \omega_{вкл},$$

где σ_{2-3} и σ_{1-2} – межфазные энергии на границах сплав–зародыш и зародыш–включение;

$\omega_{сф}$ и $\omega_{вкл}$ – площади поверхностей зародыша на границе со сплавом и на границе с включением;

σ_{1-3} – межфазная энергия на границе между включением и сплавом.

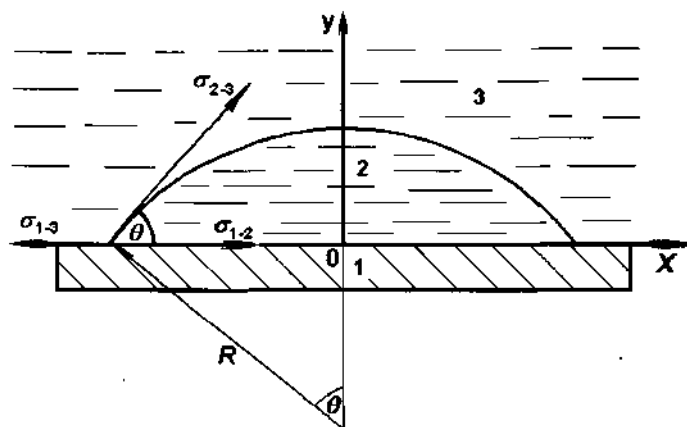


Рис. 3.8. Схема зарождения кристалла на плоской поверхности включения:

1 – включение; 2 – зародыш; 3 – жидкий сплав

Выполнив геометрические преобразования (предлагаем читателю осуществить их самостоятельно), получаем следующие формулы для вычисления V , $\omega_{\text{сф}}$ и $\omega_{\text{вкл}}$:

$$V = \frac{\pi R^3}{3} \cdot (2 - 3 \cos \theta + \cos^3 \theta);$$

$$\omega_{\text{сф}} = 2\pi R^2 (1 - \cos \theta); \quad \omega_{\text{вкл}} = \pi R^2 \sin^2 \theta.$$

Подставив эти выражения в формулу для ΔG_{Σ} и выполнив исследования на максимум, получаем следующие выражения для вычисления энергии образования критического зародыша на включении и соответствующего ему размера $R_{\text{кр}}$:

$$R_{\text{кр}} = \frac{(4\sigma_{2-3}(1 - \cos \theta) + 2(\sigma_{1-2} - \sigma_{1-3})\sin^2 \theta) \cdot T_{\text{кр}} \cdot M}{L \cdot \Delta T \cdot \rho \cdot (2 - 3 \cos \theta + \cos^3 \theta)};$$

$$\Delta G_{\text{max}} = \frac{1}{3} \pi R_{\text{кр}}^2 (2 - 2 \cos \theta - \sin^2 \theta \cdot \cos \theta) \sigma_{2-3}.$$

Предлагаем читателю получить эти формулы самостоятельно.

При полном несмачивании включения сплавом ($\theta = \pi$) имеем сферический зародыш. При этом $\Delta G_{\text{max}} = \frac{4\pi}{3} \cdot R_{\text{кр}}^2 \cdot \sigma_{2-3}$. При полном смачивании ($\theta = 0$) $\Delta G_{\text{max}} = 0$. Сравним работу образования зародыша на включении при $0 < \theta < 180^\circ$ с работой гомогенного образования сферического зародыша (при $0 < \theta < \pi$):

$$\begin{aligned} \frac{(\Delta G_{\text{max}})_{\text{вкл}}}{(\Delta G_{\text{max}})_{\text{гом}}} &= \frac{3\pi R_{\text{кр}}^2 (2 - 2 \cos \theta - \sin^2 \theta \cdot \cos \theta) \sigma_{2-3}}{3 \cdot 4 \cdot \pi R_{\text{кр}}^2 \cdot \sigma_{2-3}} = \\ &= \frac{2 - 2 \cos \theta - \sin^2 \theta \cdot \cos \theta}{4} < 1. \end{aligned}$$

Таким образом, работа образования критического зародыша на включении меньше, чем в гомогенном расплаве. СВЦК при этом вычисляется по ранее приведенным формулам, если вместо ΔG_{max} в них подставлять полученное выше выражение для расчета максимального изменения

энергии Гиббса при образовании зародыша на включении. Так как $\Delta G_{\max}$ при этом меньше, чем при гомогенном зарождении, то СВЦК при наличии включений увеличивается. Очевидно, что $\Delta G_{\max}$ становится меньше с уменьшением θ , т.е. с усилением смачиваемости включения сплавом. Поэтому СВЦК увеличивается с уменьшением θ .

Следует отметить, что не любые твердые включения резко увеличивают СВЦК. Из приведенных выражений видно, что это произойдет, если малы значения θ и $\sigma_{2,3}$. Очевидно, что $\sigma_{2,3}$ будет тем меньше, чем ближе кристаллическая структура включения к кристаллической структуре зародыша. По правилу ориентационно-размерного соответствия, предложенному П.Д. Данковым и С.Т. Конобеевским, необходимо, чтобы включения имели один тип кристаллической решетки со сплавом. При этом параметры решеток не должны сильно отличаться. Такие включения называют *изоморфными*. Указанное правило было обосновано П.Д. Данковым следующим образом. На подкладке может образоваться ориентированный относительно ее решетки зародыш (он является как бы продолжением решетки включения) или произвольно ориентированный зародыш (как при гомогенной кристаллизации). Если параметры решеток различаются, то решетка зародыша, взаимодействуя с атомами решетки включения, упруго деформируется (расширяется или сжимается со сдвигом).

Если работа деформации больше энергии образования трехмерного неориентированного зародыша, то зародышеобразование на включении не произойдет. Выполнив соответствующие расчеты для хлористого натрия, П.Д. Данков нашел, что ориентированное зарождение прекращается при различии в параметрах решеток соли и включения, равном 9 %. Практическая проверка формулы П.Д. Данкова показала, что она дает завышение предельно допустимого отклонения параметров решеток. Практически при кристаллизации соли хлористого натрия на галените ориентированное зарождение прекращалось при $\frac{\Delta a}{a} = 5,7\%$. В качестве примеров ориенти-

рованного зарождения центров кристаллизации металлических расплавов можно привести рост медных кристаллов ($a=3,6\text{\AA}$) на никелевых включениях ($a=3,52\text{\AA}$), кристаллов α -латуни ($a=3,68\text{\AA}$) на серебре ($a=4,08\text{\AA}$). Измельчение кристаллического зерна в отливках вследствие увеличения СВЦК путем введения в расплав изоморфных примесей широко применяется на практике и называется *модифицированием первого рода*. Например, при введении в жидкий алюминий титана или циркония образуются тугоплавкие интерметаллические соединения TiAl_3 и ZrAl_3 , имеющие изоморфную с алюминием кристаллическую решетку. Достаточно ввести в сплав десятые доли процента титана или циркония, как размер кристаллического зерна уменьшается в десятки и сотни раз.

Затравочное действие твердых включений зависит от термовременной обработки расплава. На рис. 3.9 приведена зависимость числа кристаллических зерен N на единицу площади шлифа от температуры обработки жидкого сплава. Видно, что с ростом температуры перегрева сплава N уменьшается. Начиная с некоторой, хотя и очень высокой, температуры, ниспадающая кривая переходит в восходящую. Увеличение СВЦК при высоких перегревах объясняется тем, что при этом дезактивированы все включения и сплав кристаллизуется по гомогенному механизму в условиях очень больших переохлаждений.

Очевидно, что если в расплаве содержится большое число истинно изоморфных примесей, то их дезактивация при перегреве не происходит.

При увеличении перегрева сплава кроме отмеченных выше явлений может происходить растворение включений в расплаве или, наоборот, выделение их из расплава. В зависимости от характера выделяющихся или растворяющихся включений изменяется кристаллическая структура сплава. Например, при перегреве магниевых сплавов, легированных алюминием, марганцем и железом, при некоторой температуре происходит растворение алюминиево-железистых соединений в расплаве. При охлаждении сплава в процессе кристаллизации эти соединения выделяются из расплава в виде компактных изоморфных частиц, что увеличивает СВЦК и измельчает структуру. Этот прием широко применяется в практике магниевого литья и носит название *модифицирования перегревом*. При перегреве чугуна происходит полное растворение углерода, что по аналогичным перегреву магниевых сплавов причинам приводит к резкому увеличению дисперсности выделяющихся при кристаллизации чугуна включений графита.

В заключение отметим, что при кристаллизации на примесях сохраняется характер изменения СВЦК с уменьшением переохлаждения. Однако

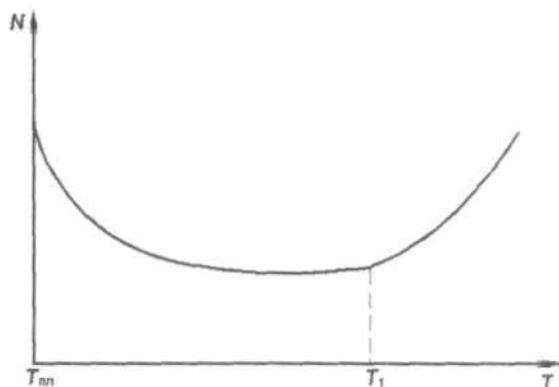


Рис. 3.9. Зависимость числа кристаллических зерен на единицу площади шлифа от перегрева металла

при этом резко сокращается интервал метастабильности и повышается количественный уровень СВЦК. Это объясняется не только непосредственным влиянием переохлаждения на работу образования и размер критического зародыша, но и увеличением числа неизоморфных включений, удовлетворяющих сформулированному выше условию ориентированного роста.

Действительно, по данным Д. Тернбала и Б. Воннегута, энергия упругого деформирования кристалла на подкладке может быть оценена по

формуле $\Delta G = \frac{(a_{\text{вкл}} + a_m)^2}{a_m^2}$, а движущая процесс разность энергий Гиб-

бса при увеличении переохлаждения возрастает. Поэтому при увеличении переохлаждения все большее число включений удовлетворяет условию ориентированного зарождения.

Глава 3. МЕХАНИЗМ И КИНЕТИКА РОСТА КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ЗАРОДЫШЕЙ

Образовавшиеся центры кристаллизации самопроизвольно увеличивают свои размеры. Кристалл растет путем присоединения к нему атомов из окружающего расплава. Способ присоединения атомов к поверхности растущего зародыша определяется строением поверхности раздела фаз, распределением и количеством дефектов на этой поверхности. В соответствии с современной теорией кристаллизации механизм роста кристаллов определяется состоянием поверхности их граней. В зависимости от этого фактора выделяют следующие механизмы роста кристаллов.

1. Рост кристаллов может происходить на атомно-гладких поверхностях кристалла. В этом случае все атомы поверхности раздела кристалл-расплав расположены на одной плоскости, на которой нет образований адсорбированных атомов типа уступов, ступеней и т. п. Образование уступов, ступеней, выступов из групп атомов называется процессом *огранки поверхности*, которая при этом называется *ограниченной*.

При атомно-гладкой поверхности зародыша (рис. 3.10, а) возможен только послойный рост кристалла путем образования на гранях двумерных зародышей, которые разрастаются затем вдоль этих граней. Рост путем присоединения отдельных атомов в данном случае энергетически неустойчив, так как каждый адсорбированный поверхностью атом имеет только одного ближайшего «соседа» и, следовательно, только одну связь (рис. 3.11, а). В таких условиях он не может устойчиво закрепиться на поверхности. Поэтому рост может происходить только путем образования и закрепления тонких, одно-, двух- и трехатомных по толщине, плоских образований атомов, называемых *двумерными зародышами* (рис. 3.11, б).

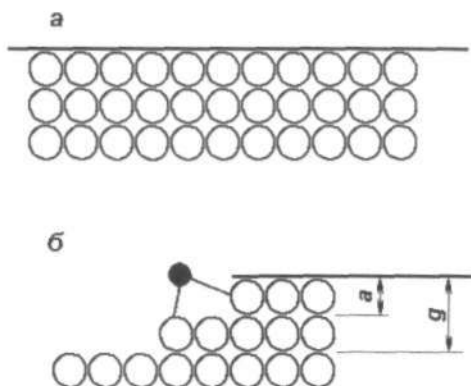


Рис. 3.10. Типы морфологии поверхности растущего кристалла:
а – атомно-гладкая поверхность; б – ограненная поверхность

На рис. 3.12 приведена схема образования двумерного зародыша на грани растущего кристалла. При этом поверхность кристалла увеличивается на $\Delta S = 4 \cdot 2x \cdot \delta = 8x \cdot \delta$, т.е. на величину поверхности четырех боковых граней. Соответствующее возрастание поверхностной энергии равно $A_s = 8x \cdot \delta \cdot \sigma = 8x \cdot \sigma'$, где $\sigma' = \delta \cdot \sigma$ – поверхностная энергия, приходящаяся на единицу периметра зародыша толщиной δ . Если энергию Гиббса зародыша с основанием 1 см^2 обозначить φ_2 , а энергию Гиббса, приходящуюся на то же число атомов жидкости, – φ_1 , то полное изменение энергии при зародышеобразовании составит

$$\Delta G = -4x^2(\varphi_1 - \varphi_2) + 8x \cdot \sigma' = 8x(\sigma' - \Delta\varphi \cdot \frac{x}{2}).$$

Подставив в это выражение $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \Delta H' \cdot \frac{\Delta T}{T_{кр}}$, где $\Delta H'$ –

теплота плавления зародыша с основанием 1 см^2 , получаем

$$\Delta G = 8x(\sigma' - \Delta H' \cdot \frac{\Delta T \cdot x}{2T_{кр}}). \Delta H' = \frac{L \cdot \delta \cdot \rho}{M};$$

$$\Delta G = 8x(\sigma' - \frac{L \cdot \delta \cdot \rho \cdot \Delta T \cdot x}{2T_{кр} \cdot M}).$$

Исследуем эту зависимость на экстремум:

$$\frac{d(\Delta G)}{dx} = 8(\sigma' - \frac{L \cdot \delta \cdot \rho \cdot \Delta T \cdot x_{кр}}{T_{кр} \cdot M}) = 0.$$

Из этого уравнения находим выражение для вычисления критического размера зародыша $x_{кр}$, при котором ΔG достигает максимума:

$$x_{кр} = \frac{\sigma' \cdot T_{кр} \cdot M}{L \cdot \delta \cdot \rho \cdot \Delta T} = \frac{\sigma \cdot T_{кр} \cdot M}{L \cdot \rho \cdot \Delta T}.$$

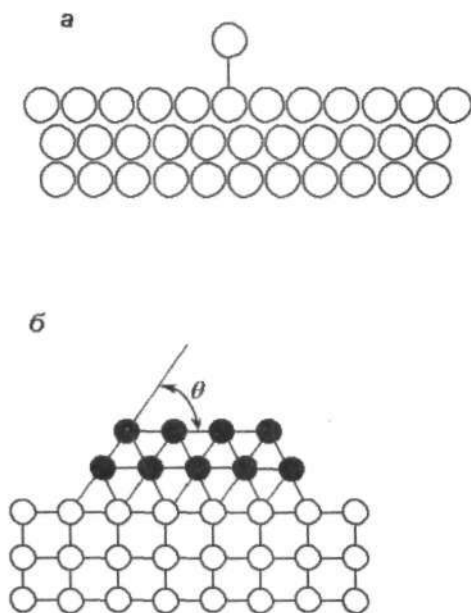


Рис. 3.11. Рост кристалла путем присоединения отдельных атомов (а) и двумерных зародышей (б)

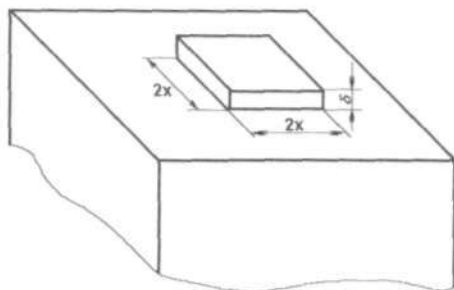


Рис. 3.12. Схема образования двумерного зародыша на грани кристалла

Работа образования зародыша вычисляется по формуле

$$\begin{aligned}\Delta G_{\max} &= 8 \frac{\sigma^2 \delta \cdot T_{\text{кр}} \cdot M}{L \cdot \rho \cdot \Delta T} - \frac{4\sigma^2 \cdot T_{\text{кр}}^2 \cdot M^2 \cdot L \cdot \rho \cdot \delta \cdot \Delta T}{L \cdot \rho^2 \cdot T_{\text{кр}} \cdot M \cdot (\Delta T)^2} = \\ &= \frac{4\sigma^2 \delta \cdot T_{\text{кр}} \cdot M}{L \cdot \rho \cdot \Delta T} = \frac{x_{\text{кр}} \cdot \sigma^2}{2} = \frac{A_S}{2}.\end{aligned}$$

Сравнение полученных формул для вычисления размера и работы образования двумерного критического зародыша с соответствующими выражениями для трехмерного зародыша показывает, что критический размер двумерного зародыша в 2 раза меньше, чем трехмерного, меньше и работа образования критического двумерного зародыша. Вероятность образования в единице объема двумерного зародыша равна

$$p_1 = c_1 \cdot \exp\left(-\frac{4\sigma^2 \delta \cdot T_{\text{кр}} \cdot M}{L \cdot \delta \cdot \rho \cdot \Delta T \cdot kT}\right).$$

Вероятность присоединения к зародышу в единицу времени хотя бы одного атома равна $p_2 = c_2 \cdot \exp\left(-\frac{U}{kT}\right)$. Вероятность образования центра кристаллизации вычисляется по формуле

$$p_2 = p_1 \cdot p_2 = c_3 \cdot \exp\left(-\frac{4\sigma^2 \delta \cdot T_{кр} \cdot M}{L \cdot \delta \cdot \rho \cdot \Delta T \cdot kT}\right) \cdot \exp\left(-\frac{U}{kT}\right),$$

где $c_3 = c_1 \cdot c_2$ – некоторая постоянная для данного вещества величина.

Скорость роста кристалла пропорциональна вероятности p , т.е.

$$v = c_4 \cdot \exp\left(-\frac{4\sigma^2 \delta \cdot T_{кр} \cdot M}{L \cdot \delta \cdot \rho \cdot \Delta T \cdot kT}\right) \exp\left(-\frac{U}{kT}\right).$$

Характер зависимости линейной скорости роста кристалла от переохлаждения ΔT показан на рис. 3.13.

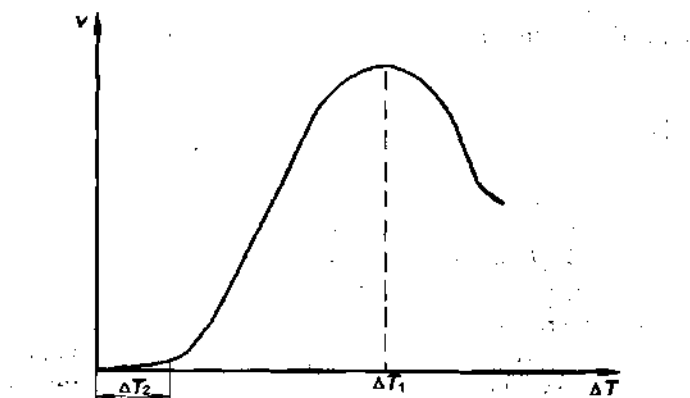


Рис. 3.13. Зависимость линейной скорости роста кристалла от переохлаждения

Величина интервала метастабильности при росте кристаллов ΔT_2 значительно меньше, чем ΔT_1 при зарождении. При этом, как правило, реализуется только восходящая ветвь кривой (см. рис. 3.13). Зависимость можно аппроксимировать следующей функцией:

$$v = m \cdot (\Delta T - \Delta T_2)^p \approx m(\Delta T)^p,$$

где $1 \leq p \leq 2$. Двумерный зародыш быстро растет, последовательно присоединяя к своим боковым граням ряды атомов так, что слой, образованный зародышем, покрывает грань кристалла. После заполнения грани наступает

пауза, длительность которой $\tau \sim \exp(4\sigma' \frac{x_{кр}}{kT})$ обратно пропорциональна вероятности p_1 . Затем наращивается новый слой и т.д. У кубического кристалла в идеальном случае все шесть граней перемещаются с одинаковой скоростью в направлениях своих нормалей.

Когда грань кристалла достаточно велика, длительность ее заполнения l значительно больше времени ожидания появления нового зародыша τ . В этом случае возможны образование и независимый рост двух или нескольких зародышей (рис. 3.14).

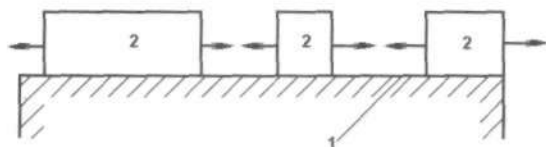


Рис. 3.14. Схема одновременного роста нескольких двумерных зародышей:
1 – грань кристалла; 2 – зародыш

2. На атомно-шероховатых поверхностях кристаллов могут надежно адсорбироваться отдельные атомы жидкости (рис. 3.10, б). При этом происходит так называемый *нормальный рост кристаллов*, когда атомы расплава беспорядочно присоединяются к любым точкам поверхности. В этом случае грань кристалла перемещается однородно по нормали к самой себе. Соответствующий расчет показывает, что линейная скорость роста в данном случае пропорциональна переохлаждению:

$$v = m \cdot \Delta T,$$

$$16r_a \cdot ML\nu \cdot \exp\left(-\frac{U}{kT_{кр}}\right)$$

$$\text{Здесь } m = \frac{9RT_{кр}^2}{},$$

где r_a – радиус атома;

R – универсальная газовая постоянная;

ν – частота колебаний атомов в жидкости, $\nu = 10^{13} \text{ с}^{-1}$.

3. Механизм роста существенно изменяется, если на поверхности растущего кристалла имеются какие-нибудь выступы, которые облегчают закрепление частиц жидкости. Очень часто такие выступы образуются в

местах выхода винтовых дислокаций. Кристаллы, на гранях которых имеются ступеньки, возникшие в результате выхода винтовых дислокаций, растут послойно путем присоединения атомов расплава к этим ступенькам. Не приводя вывода, запишем формулу для вычисления линейной скорости в этом случае:

$$v = \frac{2L^2 \cdot D(\Delta T)^2}{4\pi V_m \cdot \sigma \cdot R \cdot T_{кр}^3},$$

где σ – межфазное натяжение на границе кристалл–жидкость;

V_m – молярный объем жидкости;

D – коэффициент диффузии.

Из формулы видно, что линейная скорость роста v пропорциональна $(\Delta T)^2$. Дислокационный послойный рост происходит при значительно меньших переохлаждениях, чем рост двумерных зародышей. Интервал метастабильности по росту в этом случае равен нулю.

На рис. 3.15 приведены результаты исследования механизма роста в зависимости от величины переохлаждения на фронте кристаллизации.

Видно, что при малых переохлаждениях рост осуществляется путем образования двумерных зародышей, при больших переохлаждениях – по нормальному механизму. При этом фронт не огранен, т.е. имеет вид атомно-шероховатой поверхности. В промежуточной зоне переохлаждения рост может осуществляться по дислокационному механизму. В реальных условиях литья, как правило, реализуется нормальный механизм роста.

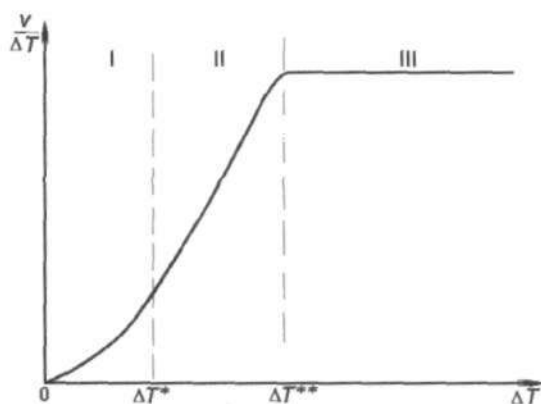


Рис. 3.15. Зависимость механизма роста кристаллов от величины переохлаждения на фронте кристаллизации:

I – зона образования двумерных зародышей; II – промежуточная зона; III – зона нормального роста кристаллов

Глава 4. КИНЕТИКА КРИСТАЛЛИЗАЦИИ. ФОРМУЛА КОЛМОГОРОВА

Рассмотренные выше характеристики процесса кристаллизации – скорость возникновения центров кристаллизации n и линейная скорость роста кристаллов v – являются важнейшими кристаллизационными характеристиками, определяющими кинетику кристаллизации. Математической величиной, описывающей кинетику кристаллизации, является временная зависимость объема закристаллизовавшейся жидкости.

Решение задачи о кинетике нарастания твердой фазы при кристаллизации было впервые выполнено А.Н. Колмогоровым. Используя аппарат теории вероятностей, можно получить следующую формулу:

$$V_{me} = V_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{4\pi}{3} \cdot \int_0^t n(\tau) \left[\int_\tau^t v(\tau) \cdot d\tau \right]^3 \cdot d\tau \right) \right],$$

где $n(\tau)$ и $v(\tau)$ – скорость возникновения центров кристаллизации и линейная скорость их роста как функции времени;

V_0 – начальный объем расплава.

Формула справедлива для сферического зародыша. Если принять в ней $n = \text{const}$ и $v = \text{const}$, то после интегрирования нетрудно получить формулу Колмогорова

$$V(t) = V_0 (1 - e^{-\pi v^3 n t^4 / 3}). \quad (3.4)$$

Графически она описывается кривой, показанной на рис. 3.16. Видно, что на начальных и конечных временных участках наблюдается незначительный темп нарастания твердой фазы. Замедление кристаллизации в конце объясняется тем, что растущие кристаллы начинают соприкасаться друг с другом при малом и непрерывно уменьшающемся количестве жидкости. Так как в конце кристаллизации объем жидкости мал, то основное положение вывода $V_0 \gg V_{кр}$ не соблюдается. Поэтому из формулы вытекает неправдоподобный результат, что продолжительность полного затвердевания объема равна бесконечности. Погрешность формулы тем больше, чем меньше кристаллов и чем больше размер зерна. Принято считать, что формула обеспечивает расчет с погрешностью не более 1 %, если выполняется условие $V_0(n/v)^{3/4} > 200$. Анализ показывает, что это условие, как правило, соблюдается при затвердевании реальных сплавов.

В обобщенном виде уравнение кинетики кристаллизации можно записать следующим образом:

$$V_{ms}(t) = V_0(1 - e^{-\omega}).$$

Здесь $\omega = \varphi \int_0^t n(\tau) \left[\int_\tau^t v(\tau) \cdot d\tau \right]^3 \cdot d\tau$,

где φ — коэффициент, учитывающий конфигурацию кристаллита, $\varphi = 4\pi/3$ для шара и $\varphi = 8$ для кубических кристаллитов.

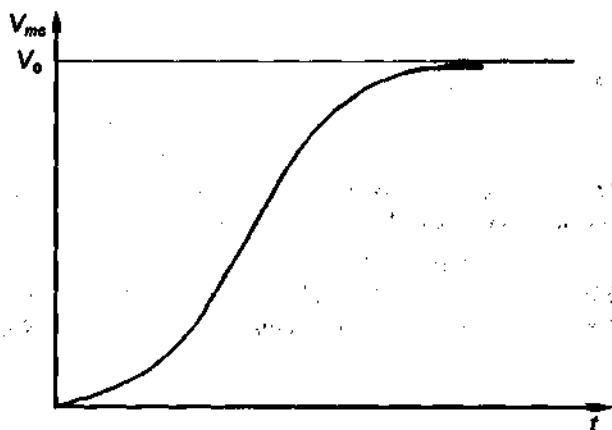


Рис. 3.16. Кинетическая кривая кристаллизации

Рассмотрим кинетику кристаллизации при объемном затвердевании. Возьмем некоторый объем сплава V_0 , который охлаждается при малой интенсивности теплообмена с внешней средой. В этих условиях можно пренебречь перепадом температур по объему и рассматривать, что кристаллизация происходит путем равномерного выделения по всему объему твердой фазы. Такое затвердевание называют *чисто объемным*. Пусть при $t=0$ температура расплава равна $T = T_{кр} - \Delta T_1$, где ΔT_1 — интервал метастабильности по зарождению кристаллов. Напишем уравнение теплового баланса:

$$-\alpha(T - T_0) \cdot S \cdot dt = c\rho V_0 \cdot dT - L \cdot \rho \cdot dV_{ms},$$

где α – коэффициент теплоотдачи с наружной поверхности объема;

S – поверхность охлаждения;

T_0 – температура среды;

L , c и ρ – удельная теплота кристаллизации, теплоемкость и плотность расплава;

$V_{mв}$ – объем металла, затвердевшего за время t ;

dT – изменение температуры за время dt .

Для оценки зависимости параметров n и v от переохлаждения примем $v = m \cdot \Delta T = m(T_{кр} - T)$, $n = n_0(\Delta T - \Delta T_1)^2 = n_0(T_{кр} - T - \Delta T_1)^2$ при $\Delta T > \Delta T_1$ и $n = 0$, если $\Delta T \leq \Delta T_1$. Проинтегрируем это уравнение при начальном условии: при $t = 0$ $V_{mв} = 0$ и $T = T_{кр} - \Delta T_1$. Кроме того, в левой части уравнения примем $T = T_{кр}$ ввиду малой величины переохлаждения ΔT при кристаллизации металлов.

$$T = T_{кр} - \Delta T_1 - \frac{\alpha}{c\rho \cdot R}(T_{кр} - T_0) \cdot t + \frac{L \cdot V_{mв}}{c \cdot V_0},$$

где $R = \frac{V_0}{S}$.

Подставив в это уравнение выражение для вычисления $V_{mв}$ (см. формулу Колмогорова), получаем интегральное уравнение, описывающее изменение температуры металла при его объемной кристаллизации:

$$T = T_{кр} - \Delta T_1 - \frac{\alpha}{c\rho R}(T_{кр} - T_0)t + \frac{L}{c}(1 - e^{-\omega}). \quad (3.5)$$

Решить это уравнение возможно только с применением численных методов на ЭВМ. Изменение температуры во времени показано на рис. 3.17 (расчетные данные). Подобный характер температурной кривой подтверждается многочисленными экспериментами.

Если бы в расплаве не выделялась теплота кристаллизации, то температура уменьшалась бы в соответствии со штриховой линией на

рис. 3.17, которая отвечает уравнению $T = T_{кр} - \Delta T_1 - \frac{(T_{кр} - T_0) \cdot t \cdot \alpha}{c\rho \cdot R}$.

Однако выделяющаяся теплота кристаллизации замедляет темп охлажде-

ния, и в момент $t = t_{\max} \frac{\partial T}{\partial t} = 0$, что соответствует минимуму температуры, или максимуму переохлаждения ($\Delta T = T_{кр} - T$). При $t > t_{\max} \frac{dT}{dt} > 0$, а температура сплава повышается, пока переохлаждение не станет меньше интервала метастабильности по зарождению ΔT_1 . При $t > t_1 \Delta T < \Delta T_1$ и зарождение новых кристаллов в расплаве прекращается. Далее будет происходить только рост образовавшихся в период $0 < t < t_1$ центров до полного затвердевания металла при $t = t_{затв}$. Этот подъем температуры называется *рекалесценцией*.

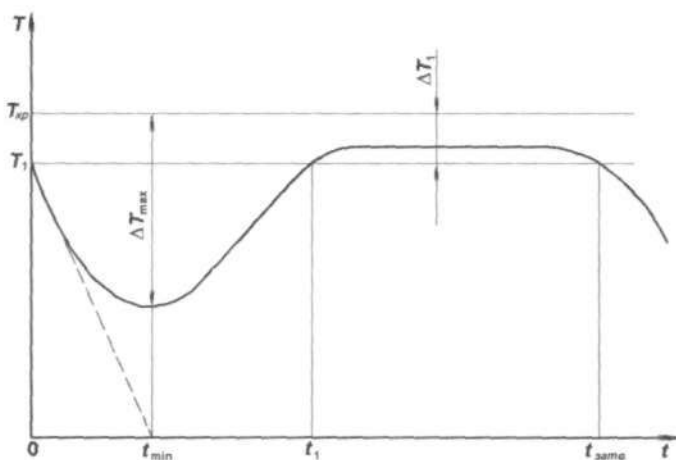


Рис. 3.17. Изменение температуры расплава при его объемной кристаллизации

Приближенное решение уравнения, выполненное с использованием метода итераций, позволило получить следующие формулы для расчета параметров температурной кривой:

$$t_{\min} = \sqrt[8]{\frac{35}{2E \cdot n_0 \cdot m^3 \cdot B^4}};$$

$$\Delta T_{\max} = T_{кр} - \Delta T_1 - Bt + \frac{2E \cdot n_0 \cdot m^3 \cdot B^5}{315} \cdot t^9;$$

$$t_1 = \sqrt[8]{\frac{315}{2E \cdot n_0 \cdot m^3 \cdot B^4}}; E = \frac{L \cdot \varphi}{c}; B = \frac{\alpha \cdot (T_{кр} - T_0)}{c \cdot \rho \cdot R}.$$

Для вычисления количества центров кристаллизации, зародившихся на первом этапе кристаллизации, получена приближенная формула

$$N = V_0 \cdot n_0 \cdot K \cdot \sqrt[8]{\frac{B^4}{(E \cdot n_0 \cdot m^3)^3}},$$

где $K \approx 3,5$.

Расчеты на ЭВМ и эксперименты показали достаточную точность этих формул.

Величина N фактически определяет число кристаллических зерен в затвердевшей отливке, так как при $t > t_1$ новые зерна не зарождаются. Приняв, что $V_0 = N \cdot \pi d^3 / 6$, где d – эффективный диаметр зерна, с учетом формулы для вычисления N легко найти следующее выражение для оценки величины кристаллического зерна при объемной кристаллизации:

$$d = K_1 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{E^3 m^9}{n_0^5}\right)^{1/8} \cdot \frac{1}{B^{1/2}}},$$

где $K_1 = \sqrt[3]{\frac{6}{\pi K}}.$

Из полученной формулы видно, что для измельчения зерна необходимо увеличить СВЦК n_0 и уменьшить линейную скорость роста m . Видно, что зерно измельчается при повышении коэффициента теплоотдачи α и снижении удельной теплоты кристаллизации L .

Рассмотренная выше схема чисто объемной кристаллизации, когда твердая фаза растет от отдельных центров во всем объеме жидкости, может быть реализована для чистых металлов при малом значении критерия Био

($Bi = \frac{\alpha \cdot R}{\lambda}$), т. е. при малых значениях α и R . При $Bi > 0,1$, как правило,

объемная кристаллизация в центральных объемах сопровождается последовательным продвижением затвердевшей корки с поверхности охлаждения сплава к центру отливки. При объемной кристаллизации величина максимального переохлаждения $\Delta T_{\max}$ невелика (для алюминия не более

1–5 °С, для железа – до 40 °С). Длительность первого этапа ($t \leq t_1$) составляет относительно небольшую долю от общего времени затвердевания. Как правило, мы измеряем термопарой температуру сплава на втором этапе затвердевания, когда переохлаждение ($\Delta T < \Delta T_1$) очень мало. При этом температура, фиксируемая термопарой, близка к $T_{кр}$.

Изложенная теория показывает, какое большое значение для управления формированием кристаллического строения отливки кроме теплового режима имеет целенаправленное воздействие на кристаллизационные параметры n и v .

Глава 5. ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПРИМЕСЕЙ НА ФРОНТЕ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ СПЛАВОВ. ВНУТРИКРИСТАЛЛИЧЕСКАЯ ЛИКВАЦИЯ

При кристаллизации сплавов концентрации компонентов в фазах, находящихся в равновесии, как правило, различаются. Отношение концентраций компонента в находящихся в равновесии твердой и жидкой

фазах $k_0 = \frac{C_s}{C_L}$ называется *равновесным коэффициентом распределения*. На рис. 3.18, а приведен участок диаграммы состояния сплава, темпе-

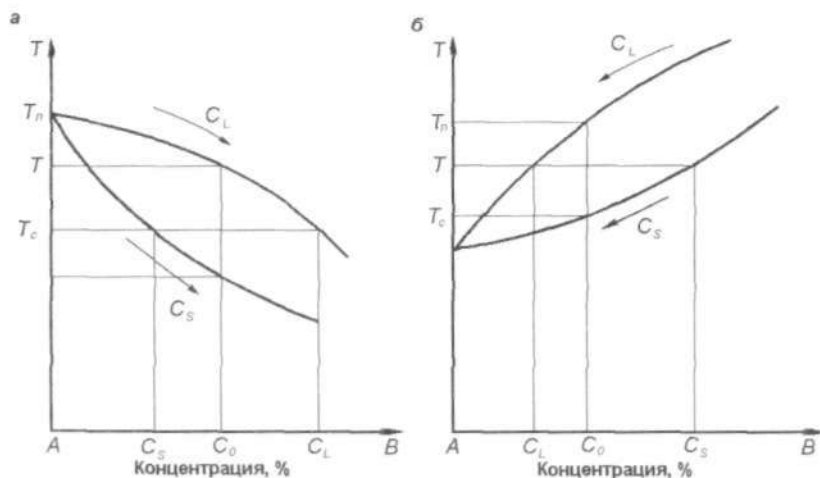


Рис. 3.18. Диаграммы состояния сплавов с понижением (а) и повышением (б) температуры ликвидуса в зависимости от роста концентрации легирующего компонента

ратура ликвидуса которого уменьшается с увеличением концентрации легирующего компонента B . Очевидно, что в этом случае коэффициент распределения $k_0 < 1$ (обычно $0,2 \leq k_0 \leq 0,6$).

При повышении температуры ликвидуса (рис. 3.18, б) коэффициент распределения $k_0 > 1$. Обычно в этом случае $k_0 < 3$. Однако, например, в системе Ge-B k_0 достигает 15.

Дальнейшее изучение кристаллизации будем проводить при $k_0 < 1$, так как эта величина является характерной для большинства литейных сплавов. Рассмотрим несколько частных случаев.

1. Скорость роста кристалла настолько мала, что диффузия успевает выровнять концентрации вещества по объему твердой и жидкой фаз. При этом концентрации будут соответствовать равновесным значениям, определенным для данной температуры по диаграмме состояния. На рис. 3.19 показано распределение концентрации по длине твердой и жидкой фаз. Ось ординат, которая соответствует концентрации, является подвижной и совпадает с положением фронта кристаллизации. В этом случае $k_0 = \frac{C_S}{C_L}$.



Рис. 3.19. Распределение концентрации по длине жидкой и твердой фаз при малой скорости кристаллизации ($k_0 < 1$)

2. Ситуация, более приближенная к реальной, имеет место, когда в твердой фазе при данной скорости роста кристалла не происходит диффузионного перераспределения вещества ($D_{ms} = 0$). Однако в жидкости вследствие интенсивного перемешивания расплава концентрации выравниваются. Так как $D_{ms} = 0$, то состав твердой фазы, образовавшийся на предыду-

ших стадиях, остается неизменным. Поскольку при $k_0 < 1$ по мере кристаллизации C_S увеличивается (см. рис. 3.18, а), то концентрация вещества будет возрастать по длине твердой фазы, оставаясь на фронте кристаллизации равной соответствующему значению, определенному по диаграмме состояния. Распределение концентраций по длине фаз в рассматриваемом случае приведено на рис. 3.20. Так как концентрация жидкости C_L больше концентрации твердой фазы на фронте кристаллизации C_S , то при затвердевании жидкости на фронте кристаллизации выделяется легирующий компонент. Например, если за время dt затвердевает dm жидкости, то количество выделившегося вещества равно $(C_L - C_S) \cdot dm$. В данном случае это вещество равномерно распределяется по объему жидкости.

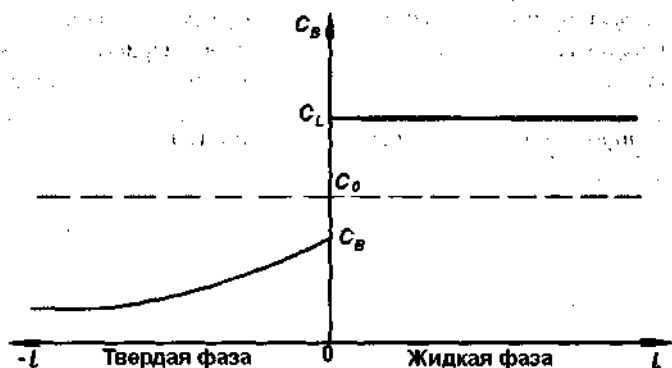


Рис. 3.20. Распределение концентраций по длине фаз при $D_{тв}=0$ и $D_{ж} \rightarrow \infty$

Явление, связанное с неравномерным распределением концентрации вещества, называется *ликвацией*. В рассматриваемом случае наблюдается максимальная ликвация в твердой фазе, называемая *внутрикристаллической ликвацией*. При этом внутренние слои сферического кристаллита будут иметь меньшую концентрацию легирующего компонента, чем поверхностные (при $k_0 < 1$). Среднее содержание вещества в твердой фазе будет всегда меньше определенного по диаграмме состояния, а в жидкости, наоборот, средняя концентрация превысит равновесные значения. Это приведет к смещению влево линий солидуса на диаграмме состояния. Положение равновесной и неравновесной линий солидуса показано на рис. 3.21. Неравновесная линия солидуса соответствует средним значениям концентрации компонента в твердой фазе. На рис. 3.21 видно, что при равновесной температуре солидуса $T_{ср}$ часть жидкости остается незатвердевшей.

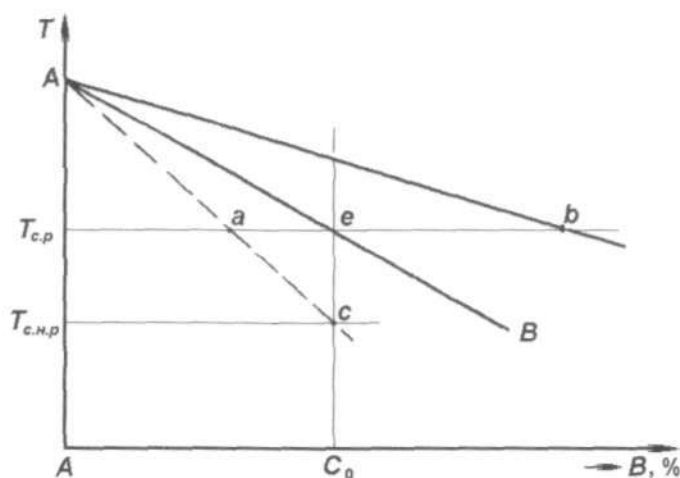


Рис. 3.21. Положение равновесной и неравновесной линий солидуса на диаграмме состояния сплава

Массовую долю этой жидкости можно найти по правилу рычага. Она равна отношению отрезков ae/ab . Полное затвердевание жидкости произойдет при более низкой температуре неравновесного солидуса $T_{c,n,p}$, которая ниже равновесного значения на величину отрезка $\Delta T = ec$.

Для выравнивания концентрации по объему кристаллитов применяют *гомогенизационный отжиг*, т.е. выдержку сплава при повышенных температурах, при которых значение коэффициента диффузии $D_{те}$ достаточно для диффузионного относительно быстрого выравнивания концентраций. Так как при перемешивании жидкости вещество, выделившееся на фронте затвердевания, отводится и равномерно распределяется по ее объему, то в этом случае $k_0 = C_s/C_L$.

3. При переходе к более высоким скоростям роста, которые обычно имеют место, реализуется диффузионно контролируемый режим кристаллизации. Перенос вещества с фронта кристаллизации в объем жидкости осуществляется путем диффузии, и распределено оно в ней неравномерно. Примесь, выделяющаяся при образовании твердой фазы ($k_0 < 1$), накапливается у движущегося фронта кристаллизации, и ее концентрация на фронте C_{L0} превышает концентрацию в объеме C_L (рис. 3.22). В данном случае

$$k_0 = \frac{C_s}{C_{L0}}$$

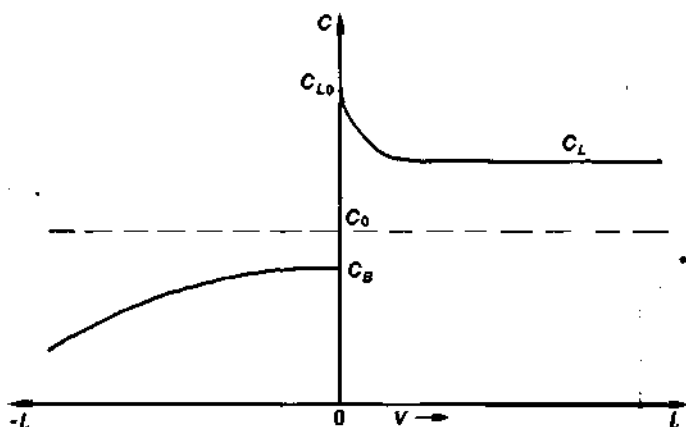


Рис. 3.22. Распределение примеси при диффузионно контролируемой кристаллизации

В процессе перемещения фронта кристаллизации концентрация C_{L0} повышается, потому что не вся примесь отводится в расплав. Это приводит к увеличению концентрации растворенного вещества как в жидкости, так и в твердой фазе. При некотором положении фронта кристаллизации концентрация в твердой фазе достигает C_0 , а в расплаве на фронте –

$C_{L0} = \frac{C_0}{k_0}$. Соответствующее данному моменту распределение концен-

траций показано на рис. 3.23.

В этих условиях можно написать следующее уравнение баланса вещества для фронта кристаллизации:

$$D \frac{dC_L}{dx} = -(C_L - C_0) \cdot v.$$

Выражение в левой части определяет количество вещества, отведенного от фронта в расплав, а выражение в правой части – количество вещества, выделившегося при кристаллизации. Проинтегрировав это уравнение

при начальных условиях $x=0$, $C_L = \frac{C_0}{k}$, получаем выражение, описывающее распределение концентрации примеси в расплаве вблизи фронта кристаллизации:

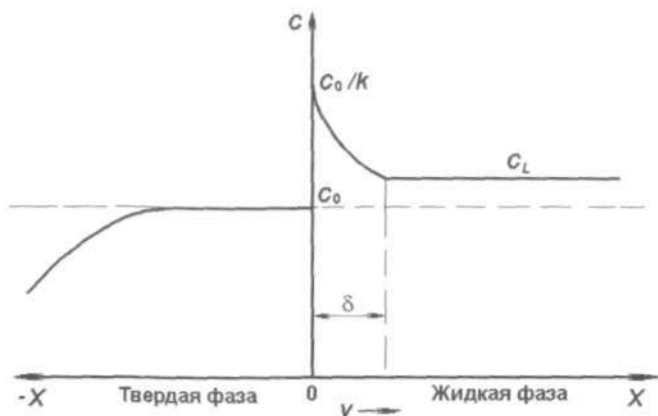


Рис. 3.23. Распределение концентраций в момент достижения их предельных значений на фронте кристаллизации

$$C_L = C_0 \left(1 + \left(\frac{1-k_0}{k_0} \right) \cdot \exp\left(-\frac{v \cdot x}{D}\right) \right). \quad (3.6)$$

На некотором расстоянии $x = \delta$ C_L практически равно C_0 . Величина δ называется *толщиной диффузионного пограничного слоя*. Она зависит от интенсивности движения жидкости. С увеличением скорости движения жидкости, особенно при перемешивании, δ быстро убывает. Если жидкость находится в покое, то $\delta = \frac{D}{v \cdot k_0}$.

Глава 6. КОНЦЕНТРАЦИОННОЕ ПЕРЕОХЛАЖДЕНИЕ. УСЛОВИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКОГО ФРОНТА КРИСТАЛЛИЗАЦИИ СПЛАВОВ

При достаточно больших скоростях кристаллизации концентрация легирующего компонента перед фронтом кристаллизации распределена неравномерно. Распределение концентрации в расплаве описывает формула (3.6), в соответствии с которой по мере удаления от фронта C_L более или менее быстро убывает.

Как видно из диаграммы состояния (см. рис. 3.18, а), температура ликвидуса с ростом концентрации легирующего компонента уменьшается. Если принять линии ликвидуса и солидуса прямыми (рис. 3.24), то для зависимости температуры ликвидуса от концентрации компонента C_L справедливо следующее уравнение:

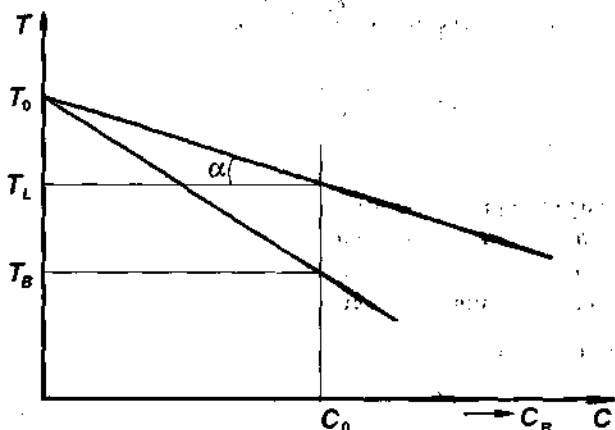


Рис. 3.24. Схема к выводу зависимости $T_L(C_L)$

$$T_L = T_0 - mC_L,$$

где T_0 – температура плавления металла, являющегося основой сплава;

m – тангенс угла наклона прямой ликвидуса к оси концентрации компонента B , $m = \operatorname{tg} \alpha$.

С учетом зависимости $C_L(x)$ получаем уравнение

$$T_{\lambda} = T_0 - mC_0 \left(1 + \left(\frac{1 - k_0}{k_0} \right) \cdot \exp\left(-\frac{v \cdot x}{D}\right) \right),$$

из которого следует, что температура ликвидуса сплава перед фронтом кристаллизации по мере удаления от него увеличивается, достигая при $x = \delta$ значения T_{λ} , отвечающего исходной концентрации сплава C_0 . Температура ликвидуса сплава на фронте кристаллизации ($C_{L0} = \frac{C_0}{k_0}$) равна

$$T_{\phi} = T_0 - m \frac{C_0}{k_0}. \text{ Схема распределения температуры ликвидуса в расплаве}$$

перед фронтом кристаллизации приведена на рис. 3.25. При охлаждении сплава в нем возникает температурный градиент через твердую фазу, равный на фронте кристаллизации $GR = \left(\frac{dT_{\lambda}}{dx} \right)_{x=0}$. Примем линейное распре-

деление температуры сплава $T(x)$ в пределах пограничного слоя δ . При этом $T(x) = T_{\phi} + GR \cdot x$. Следует отметить, что, приняв $T(x=0) = T_{\phi}$, мы пренебрегаем термическим переохлаждением ΔT .

На рис. 3.25 линия 1 соответствует кривой изменения температуры ликвидуса, а линия 2 характеризует распределение температуры сплава перед фронтом кристаллизации. В пределах слоя $0 \leq x \leq \delta$, температура сплава ниже температуры ликвидуса, т.е. сплав является переохлажденным. Это переохлаждение обусловлено изменением состава сплава в процессе кристаллизации и называется *концентрационным переохлаждением* ΔT_K в отличие от рассмотренного в гл. 1 термического переохлаждения ΔT , обусловленного падением температуры сплава за счет теплоотвода ниже температуры ликвидуса на фронте кристаллизации или в какой-либо части объема жидкости.

Наличие концентрационного переохлаждения создает условия для нарушения плоского характера фронта кристаллизации. На фронте кристаллизации всегда имеются шероховатости с выступами микроскопических размеров. Вершины этих выступов, находящиеся перед фронтом кристаллизации, попадают в зону концентрационного переохлаждения, что существенно повышает скорость их продвижения в глубь расплава, так как с увеличением переохлаждения любой природы линейная скорость роста кристалла повышается. Поэтому скорость продвижения в глубь расплава вершин выступов больше, чем оснований, находящихся на фронте, где $\Delta T_K = 0$ (см. рис. 3.25). В результате высота выступов увеличивается и плоский фронт кристаллизации нарушается.

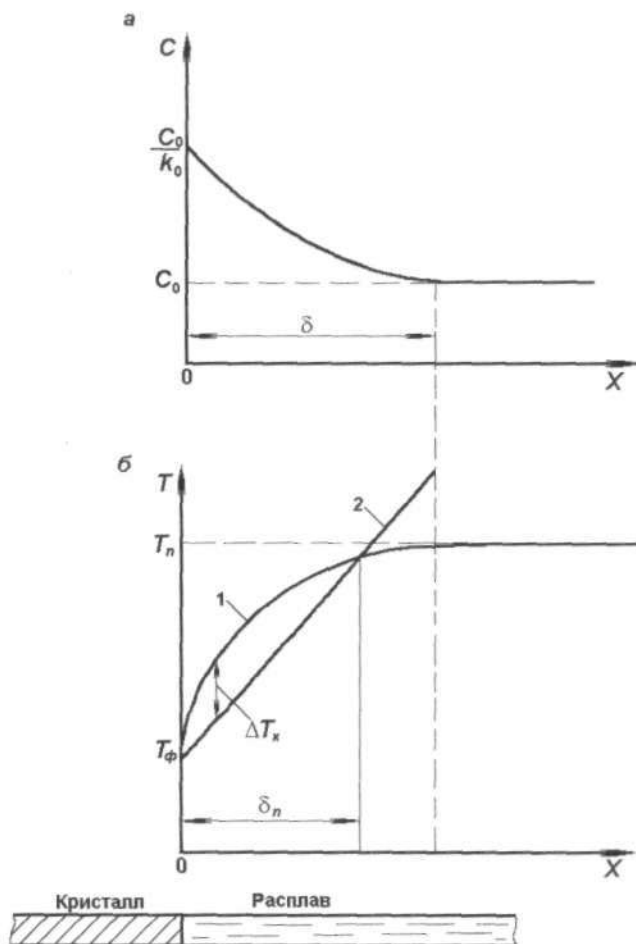


Рис. 3.25. Распределение концентрации (а) и температуры ликвидуса (б) перед фронтом кристаллизации

Таким образом, плоский фронт будет устойчивым, если отсутствует концентрационное переохлаждение. Очевидно, что если $GR \geq \left(\frac{dT_\lambda}{dx}\right)_{x=0}$, то концентрационное переохлаждение отсутствует, так как при этом прямая распределения температур $T(x)$ касается кривой $T_\lambda(x)$ на фронте кри-

сталлизации или лежит выше ее (рис. 3.26). Дифференцируя зависимость $T_s(x)$, находим

$$\left(\frac{dT_s}{dx}\right)_{x=0} = mC_0(1-k_0)\frac{v}{k_0 \cdot D}.$$

С учетом этого условия формула для определения устойчивости плоского фронта кристаллизации принимает вид

$$GR \geq \frac{mC_0(1-k_0)v}{k_0 \cdot D}, \text{ или } \frac{GR}{v} \geq \frac{mC_0(1-k_0)}{k_0 \cdot D}.$$

Из этих выражений видно, что любые мероприятия, направленные на увеличение коэффициента диффузии D (перемешивание жидкости, применение ультразвука и т.п.), а также снижающие линейную скорость роста, увеличивают устойчивость плоского фронта кристаллизации.

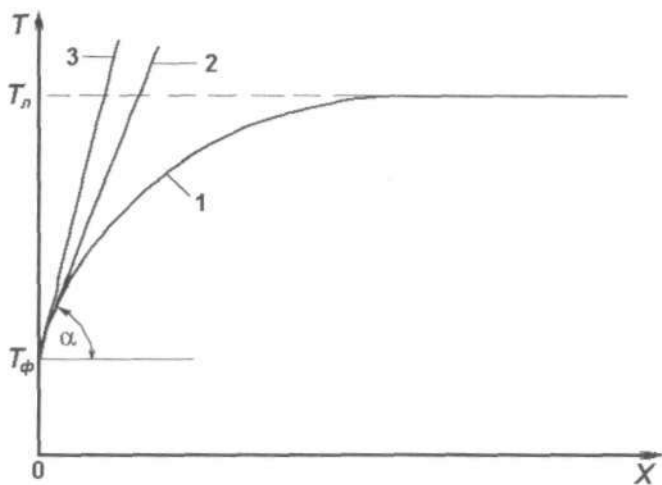


Рис. 3.26. Схема распределения температур $T(x)$ и $T_n(x)$ при отсутствии ΔT_k :
1 - $T_n(x)$; 2 - $T_1(x)$; 3 - $T_2(x)$

Глава 7. ЯЧЕИСТАЯ И ДЕНДРИТНАЯ КРИСТАЛЛИЗАЦИЯ

На рис. 3.27 изображен фронт кристаллизации с выступами, находящимися в зоне концентрационного переохлаждения. При росте кристалла скорость перемещения фронта кристаллизации направлена по нормали к его поверхности. Скорость v_x точки a будет больше, чем вертикальная компонента скорости точки b , так как точка a находится в зоне большего концентрационного переохлаждения. Поэтому в процессе роста выступ будет заостряться и увеличиваться. В точке a примесь выталкивается при кристаллизации в расплав в направлении кристаллизации. В точке b в соответствии с вектором скорости v_y , часть примеси будет выталкиваться в боковом направлении, что приводит к перемещению примеси от вершины к основанию выступов.

Примесь скапливается на границах выступов (точка c на рис. 3.27). Это ведет к падению температуры ликвидуса расплава на границах выступов ниже температуры, которую имеет в данный момент расплав. В результате при продвижении фронта кристаллизации внутри периметра выступов формируются ячейки, которые не могут срастись друг с другом, пока расплав не охладится до температуры ликвидуса в этой области. Поэтому границы ячеек могут принять вид очень глубоких и узких выемок. Кристаллит будет состоять из ряда тупых выступов, связанных друг с другом на некотором расстоянии позади фронта кристаллизации.

Условие перехода от плоского фронта к ячеистой кристаллизации было получено в гл. 2.6. На рис. 3.28 приведены области ячеистой и

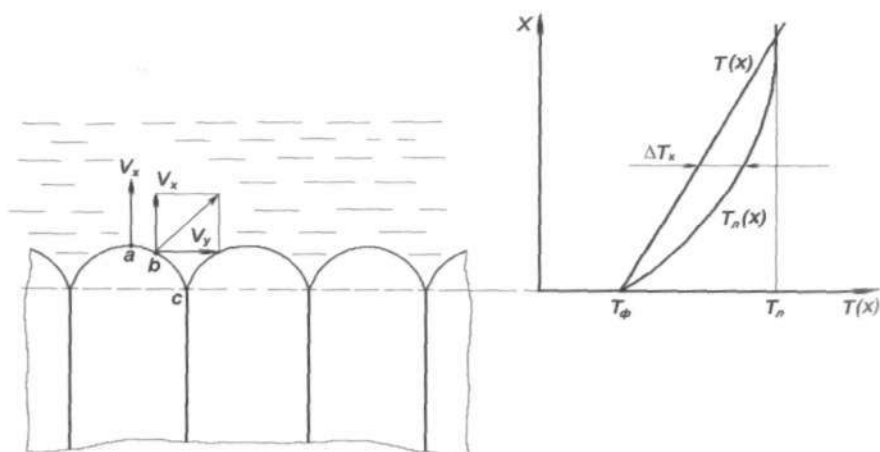


Рис. 3.27. Схема образования ячеистых кристаллов

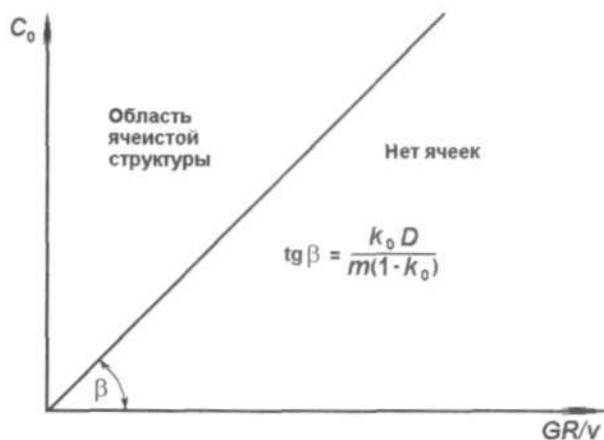


Рис. 3.28. Области ячеистой и сплошной кристаллизации

сплошной кристаллизации, граница которых удовлетворяет этому условию. По мере уменьшения температурного градиента GR в сплавах характер фронта кристаллизации постепенно изменяется от плоского при $GR \geq GR_{кр} = mC_0(1-k_0)v/(k_0D)$ до гексагонального ячеистого при $GR < GR_{кр}$.

При дальнейшем увеличении концентрационного переохлаждения будет происходить уменьшение размеров ячеек. Так как размер ячеек не может уменьшаться безгранично, то при некотором значении GR ячейки превращаются в разветвленные дендритные кристаллы. Впервые такую форму кристаллов наблюдал Д.К. Чернов, который и ввел термин «дендрит», что означает древовидный кристалл. На рис. 3.29 показан дендрит, извлеченный Д.К. Черновым из прибыли стального слитка.

Одним из условий получения *дендритной структуры* является наличие перед фронтом кристаллизации достаточно протяженной зоны пере-



Рис. 3.29. Вид дендрита, извлеченного из прибыли стального слитка

охлажденного жидкого сплава. Дендриты образуются путем роста на фронте кристаллизации первичных ветвей игл, проникающих в расплав. При этом скорость роста иглы значительно больше скорости продвижения фронта кристаллизации.

Благодаря описанному выше поперечному переносу примеси в междендритном пространстве скапливается легирующий компонент, что обуславливает большое концентрационное переохлаждение перед боковыми поверхностями дендрита. Поэтому от дендрита начинают расти боковые ветви. Толщина слоя, обогащенного примесью, невелика. Боковая ветвь относительно быстро выходит за этот слой, и скорость ее роста резко падает. При этом начинается рост ее толщины. Боковые, или вторичные, ветви присоединяются к первичным тонкими шейками, поэтому иногда происходит их отрыв. Разветвление дендрита может продолжаться с образованием ветвей третьего порядка, отходящих от вторичных ветвей. Схема дендритной кристаллизации показана на рис. 3.30. Обычно дендритная кристаллизация имеет место при малых градиентах температур GR и больших скоростях роста.

Нарушение плоского фронта кристаллизации и возникновение ячеек и дендритов может иметь место не только в сплавах, но и при кристаллизации чистого металла за счет обычного термического переохлаждения ΔT_m перед фронтом кристаллизации (рис. 3.31). Дендриты могут образовываться не только при последовательном продвижении фронта кристаллизации, но и при свободном росте кристалла в жидкости в случае объемного

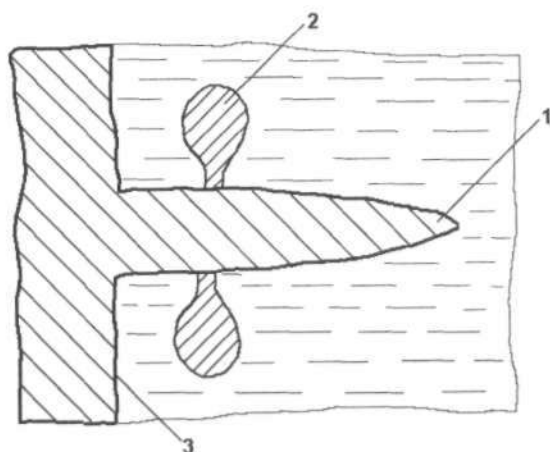


Рис. 3.30. Схема дендритной кристаллизации:
1 — первичная ветвь дендрита; 2 — вторичная ветвь дендрита;
3 — фронт кристаллизации

затвердевания. Например, если зародыш имеет форму куба, то, естественно, с его углов теплота кристаллизации будет отводиться в жидкость быстрее, чем с центров граней. Поэтому после достижения критических размеров правильный рост куба прекратится и начнется преимущественное развитие его вершин. На вершинах появятся первичные стволы, а затем на них при выполнении условий, указанных на рис. 3.31, – ответвления, т.е. вторичные ветви.

Таким образом, дендрит растет из одного центра. Схема механизма дендритного роста показана на рис. 3.32.

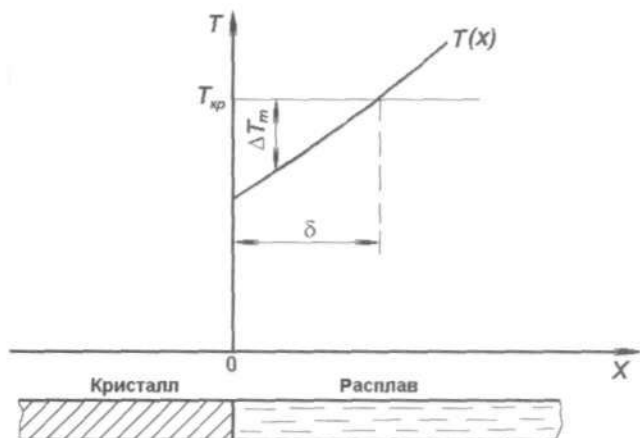


Рис. 3.31. Термическое переохлаждение перед фронтом кристаллизации чистого металла

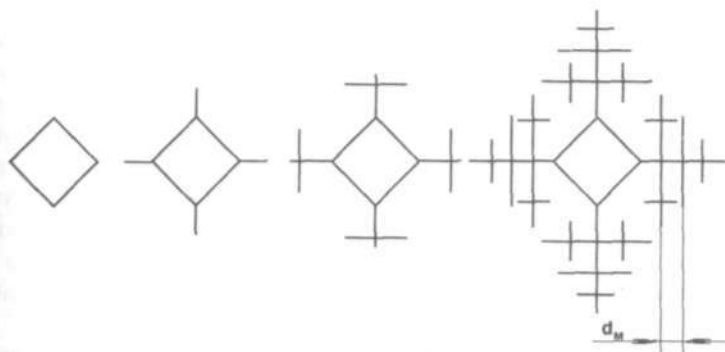


Рис. 3.32. Схема механизма дендритного роста при объемной кристаллизации

Дисперсность дендритов обычно оценивают средним расстоянием между вторичными осями d_m (см. рис. 3.32). Зависимость d_m от условий кристаллизации выражается формулой $d_m = AGR^m \cdot v^n$, где A , m и n — эмпирические величины. Растущие дендриты смыкаются при объемной кристаллизации друг с другом, образуя зерна, которые мы видим на макроструктурах (рис. 3.33).

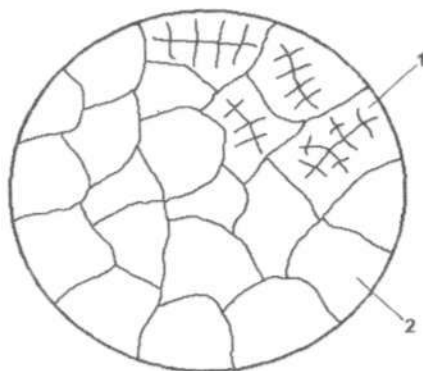


Рис. 3.33. Макроструктура литого сплава при дендритной кристаллизации: 1 — дендритная субструктура; 2 — макрозерно

Для выявления субструктуры зерна, т.е. его дендритного строения, необходимо сделать микрошлиф и рассмотреть его под микроскопом. Междендритное пространство обогащено примесями, в которых скапливаются неметаллические включения и образуются усадочные и газовые поры.

Таким образом, дендритная кристаллизация развивается при высоких скоростях роста кристаллов и больших концентрационных и термических переохлаждениях. Все мероприятия, направленные на уменьшение скорости роста и переохлаждения, будут способствовать неразветвленной кристаллизации. Скорость роста можно снизить, уменьшив, например, теплоотвод от фронта кристаллизации через кристалл. О других методах уменьшения скорости речь будет идти в гл. 10. Переохлаждение можно снизить, введя в расплав изоморфные примеси. Например, при вводе в сплав Al-5 % Si десятых долей процента титана происходит сильное измельчение зерна и исчезновение дендритной структуры.

Большую роль играет межфазное натяжение $\sigma_{к-ж}$. С его увеличением повышаются энергетические затраты на образование поверхности, что делает дендритную кристаллизацию энергетически невыгодной. Межфазное

натяжение в сплавах тем сильнее, чем больше разность концентраций жидкой и твердой фаз, находящихся в равновесии. Поэтому сплавы, диаграмма состояния которых показана на рис. 3.34, *а*, менее склонны к дендритной кристаллизации, чем сплавы, приведенные на рис. 3.34, *б*. Это является одной из причин того, что особой склонностью к образованию дендритной структуры обладают чистые металлы.

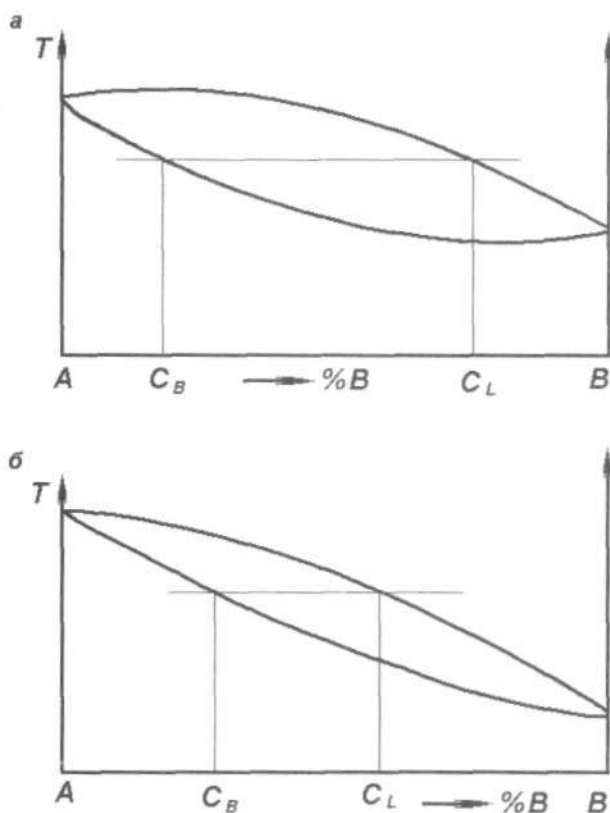


Рис. 3.34. Диаграммы состояния сплавов с различной равновесной концентрацией жидкой и твердой фаз

Глава 8. ОСОБЕННОСТИ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ ЭВТЕКТИКИ

Эвтектические сплавы (от греч. *eutektos* – легко плавящийся) обладают хорошими литейными свойствами. Поэтому они широко применяются в литейном производстве. Среди наиболее часто используемых эвтектических сплавов можно выделить чугуны, сплавы систем Al–Si, Al–Si–Mg и др.

Представления о процессе кристаллизации эвтектических сплавов начали формироваться с начала XX в. Можно отметить работы А.А. Бочвара, В.А. Тиллера, К.А. Джексона, И.Д. Ханта и других исследователей.

Эвтектические сплавы можно разделить на два типа: с нормальными и аномальными эвтектиками. *Нормальные эвтектики* характеризуются регулярной микроструктурой, состоящей из чередующихся пластин или стержней α - и β -твердых растворов. Образующие их металлы, как правило, имеют близкие температуры плавления (например, система Pb–Sn). В нормальных эвтектиках можно легко выделить эвтектические зерна – колонии. При этом в пределах каждой колонии сохраняется определенное ориентационное соотношение между фазами.

Затвердевание нормальной эвтектики начинается с зарождения одной из фаз, играющей роль ведущей фазы. На ней происходит гетерогенное зарождение кристалла другой фазы. Структура нормальной пластинчатой эвтектики схематически изображена на рис. 3.35.

Расчеты, которые мы здесь не приводим, показывают, что скорость кристаллизации v и параметр эвтектики λ связаны соотношением $v\lambda^2 = \text{const}$, т.е., чем больше скорость роста, тем меньше параметр эвтектики.

Кроме роста пластинчатой эвтектики возможен рост эвтектики, когда ведущая фаза выделяется в виде стержней (рис. 3.36). Для стержневой формы эвтектики справедливо соотношение $vR^2 = \text{const}$. Анализ показал, что если отношение объемов α - и β -фаз большое, то эвтектика будет иметь стержневую форму. Для этого нужно, чтобы количество одной фазы превышало количество другой более чем в 3 раза. В противоположном случае должна формироваться пластинчатая эвтектика. Однако для ряда эвтектик имеет место переход от пластинчатой формы к стержневой при больших скоростях роста. Объяснение этого явления пока не найдено.

При увеличении скорости охлаждения стержневая эвтектика переходит в эвтектику с шаровидными выделениями одной из фаз. В.А. Тиллер получил следующее условие устойчивости пластинчатого (или стержневого) роста:

$$\frac{\sigma_{\alpha\beta}}{\Delta S} < \frac{\sigma_{\alpha L}}{\Delta S_{\alpha}} + \frac{\sigma_{\beta L}}{\Delta S_{\beta}},$$

где $\sigma_{\alpha\beta}$, $\sigma_{\alpha L}$ и $\sigma_{\beta L}$ – соответственно межфазные энергии на границе α - и

β -фаз, на границах α -фазы и β -фазы с жидкостью;

$\Delta S = \frac{L}{T_E}$, ΔS_α и ΔS_β – изменение энтропии при кристаллизации жидкости и при кристаллизации α - и β -твердых растворов.

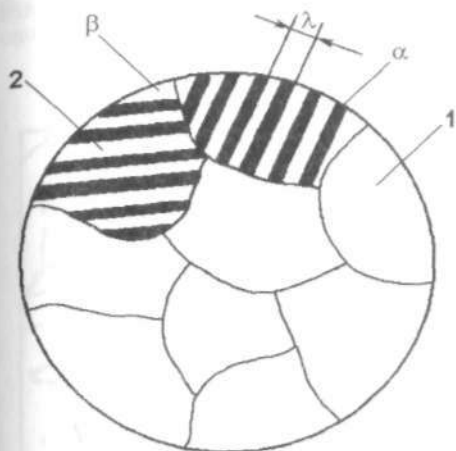


Рис. 3.35. Макроструктура (1) и микроструктура (2) эвтектического литого сплава

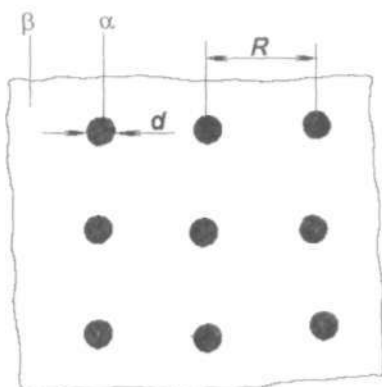


Рис. 3.36. Строение стержневой эвтектики

Если $\sigma_{\alpha\beta}$ велика, а $\sigma_{\alpha L}$ и $\sigma_{\beta L}$ малы, то пластинчатая эвтектика не будет иметь места, а реализуется шаровидная ее форма. Это подчеркивает важную роль поверхностных явлений в формировании морфологии кристаллов.

В заключение кратко рассмотрим вопросы кристаллизации *аномальных эвтектик*. Когда ведущая фаза не облегчает гетерогенное зарождение второй фазы, образуются отличные от рассмотренных типы эвтектик. В этих условиях вторая фаза зарождается в объеме расплава, ближайшем к первой. При росте фаз происходит опережение одной фазы другой. В настоящее время считают, что аномальные эвтектики образуются при ограниченном росте одной из фаз. Если на фронте роста зародыша кристалла появляется огранка (например, ступени, уступы, ступени выхода винтовых дислокаций и т.п.), то скорость роста будет меньше, чем при нормальном росте на атомно-шероховатой поверхности. Конкретный тип структур зависит от доли ограненной фазы и скорости роста.

При малой объемной доле ограниченной фазы опережающий рост неограниченной фазы лимитируется ее ветвлением. При объемной доле ограниченной фазы, меньшей 10 %, образуется структура разорванных пластин (системы Al-Sn, Zn-Sn). Здесь происходит локальное ветвление или расщепление пластин. Однако эта фаза сохраняет свою непрерывность и состоит из лент и пластин сложной формы. Ограниченная фаза как бы обходит участки неограниченной фазы. Пример структуры такой эвтектики приведен на рис. 3.37.

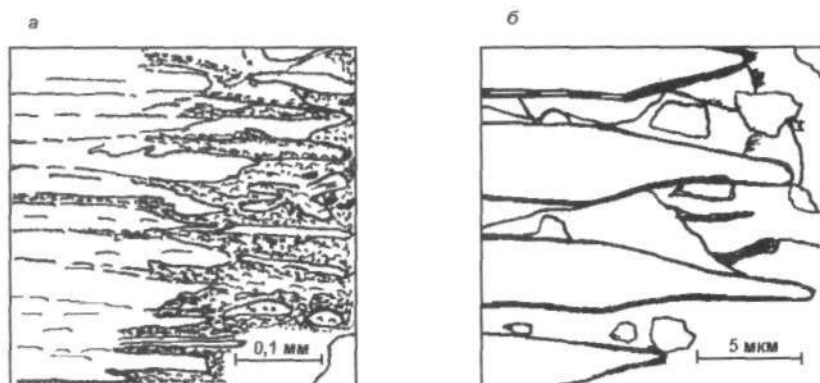


Рис. 3.37. Структура аномальной эвтектики при содержании ограниченной фазы менее 10%:
а — $\times 200$; б — $\times 4000$

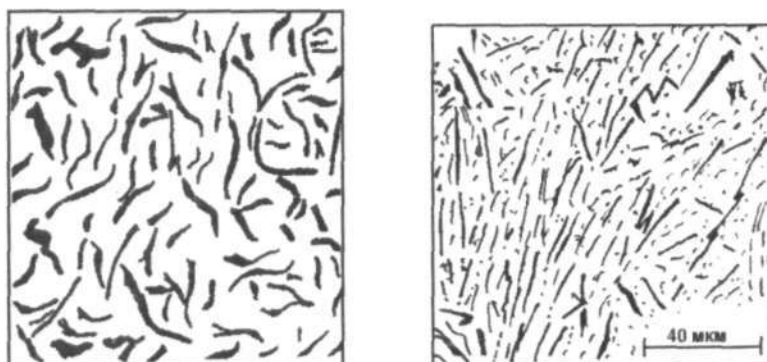


Рис. 3.38. Структура серого чугуна

Рис. 3.39. Структура эвтектики
силумина

При возрастании содержания ограненной фазы с 10 до 20 % пластины принимают чешуйчатую форму. Такая структура имеет место в ряде технически важных литейных сплавов силуминов (система $Al-Si$) и чугунов (система $Fe-C$). На рис. 3.38 и 3.39 показаны разрезы плоскостей шлифов серого чугуна и силумина. В чугуне пластинки графита на шлифе представляют собой сечения чешуек, растущих из одного центра. На рис. 3.38 разрез выполнен через центр эвтектической колонии. Влияние скорости охлаждения на вид фазы графита в чугуне показано на рис. 3.40.

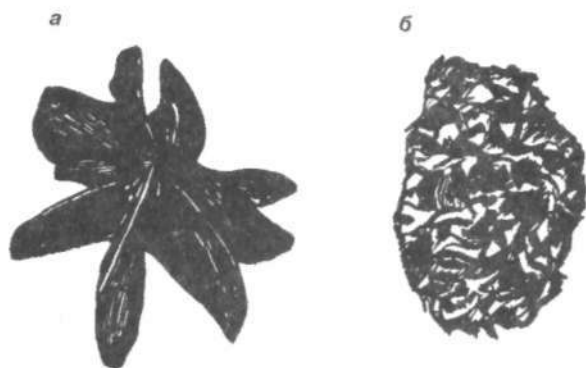


Рис. 3.40. Влияние скорости охлаждения на строение фазы графита серого чугуна:
а – малая скорость; б – большая скорость

С увеличением скорости охлаждения расстояние между чешуйчатыми пластинами уменьшается. При объемной концентрации ограненной фазы более 20 % появляется сложнерегулярная структура эвтектики (рис. 3.41).

При объемной концентрации ограненной фазы более 40 % при повышенных скоростях роста, а при концентрации 50 % и более в широком интервале условий затвердевания образуется квазирегулярная структура. Она состоит из набора пластин или стержней неограненной фазы с меньшей объемной долей в матрице из ограненной фазы. Примером такого сплава является белый чугун (система $Fe-Fe_3C$). При затвердевании происходит рост пластин цементита в направлении теплоотвода. Одновременно появляются короткие стержни аустенита, расположенные перпендикулярно пластинам цементита. Эта структура представляет собой естественный композит. Пример структуры белого чугуна приведен на рис. 3.42.

При определенных условиях ограненная фаза может принимать глобулярную форму, имеющую сложное внутреннее строение. Структура гло-

булярного графита представляет собой комплекс растущих из одного центра чешуек (рис. 3.43).



Рис. 3.41. Пример сложнерегулярной эвтектической структуры

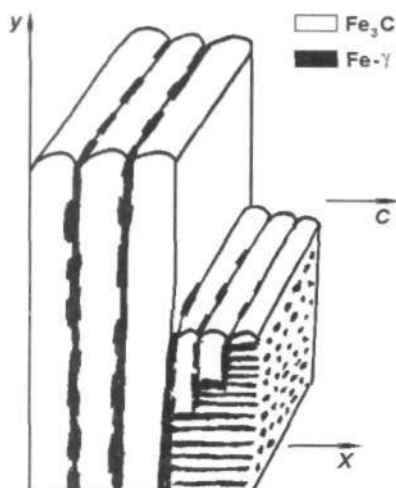


Рис. 3.42. Структура белого чугуна

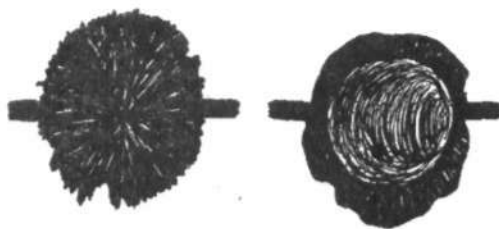


Рис. 3.43. Строение глобулярного графита в чугуне, легированном церием

Глава 9. КРИСТАЛЛИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА ОТЛИВОК

Температурное поле кристаллизующейся отливки неоднородно и нестационарно. Поэтому в разных объемах залитого в форму расплава реализуются различные условия кристаллизации, обуславливающие появление широкого спектра структур.

9.1. Структурные зоны в отливке

В общем случае структура отливки характеризуется наличием трех зон (рис. 3.44): зоны замороженных кристаллов 1, образующейся на поверхности раздела отливок с формой или вблизи нее; зоны столбчатых кристаллов 2, вытянутой параллельно направлению теплоотвода; центральной зоны равноосных кристаллов 3.

Основными характеристиками кристаллического строения отливок являются протяженность зоны столбчатых кристаллов $l_{ст}$, их поперечный размер $d_{ст}$ и средний размер зерна в центральной зоне отливки. Важное

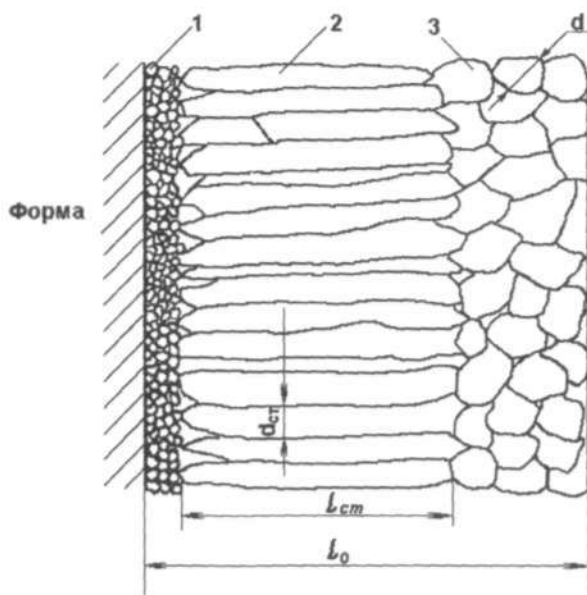


Рис. 3.44. Кристаллическая структура отливки

значение имеет такая характеристика субструктуры зерен, как среднее расстояние между вторичными осями дендритов d_m . Между этими характеристиками существуют экспериментально установленные зависимости, графически показанные на рис. 3.45, из которых можно сделать вывод, что с увеличением скорости кристаллизации v все характеристики уменьшаются.

Для количественной характеристики однородности кристаллического строения отливок Г.Ф. Баландиным предложены следующие критерии:

$$k_1 = \frac{l_{cm}}{l_0}; k_2 = \frac{d_{cm}}{d_0} \text{ или } k_3 = \frac{d}{d_0}, \text{ где } d_0 - \text{размер зерна у поверхности}$$

отливки; $k_4 = \frac{d_m}{d_{cm}}$ или $k_5 = \frac{d_m}{d}$. Кристаллическое строение однородно,

если $k_1=1$ и $k_2=1$ или $k_1=0$ и $k_3=1$.

В первом случае ($k_1=k_2=1$) тело отливки состоит только из столбча-

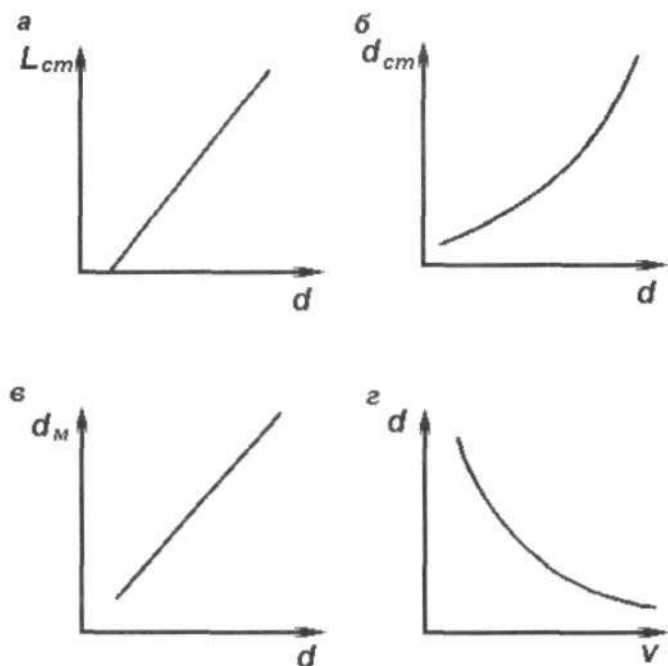


Рис. 3.45. Зависимость между средним размером зерна и протяженностью зоны столбчатых кристаллов (а), их поперечным размером (б), средним расстоянием между вторичными осями дендритов (в) и скоростью кристаллизации (г)

тых кристаллов (транскристаллизация). Это достигается односторонне направленным теплоотводом. Такая структура желательна, например, для повышения жаропрочности лопаток газовых турбин. Столбчатые кристаллы должны быть расположены вдоль действия главных растягивающих напряжений. Для повышения магнитной проницаемости постоянных магнитов структура также должна быть столбчатой с ориентацией столбчатой зоны вдоль оси магнита. При этом необходимо увеличить и размер столбчатого кристалла $d_{ст}$. Для машиностроительных отливок при сложном нагружении столбчатая структура нежелательна, так как в процессе их эксплуатации происходит разрушение по поверхности контакта столбчатых кристаллов и в местах стыка столбчатых зон.

В эвтектических сплавах, имеющих вторую фазу в виде высокопрочного интерметаллида, она выстраивается вдоль направления роста столбчатых кристаллов и упрочняет основную матрицу (см. рис. 3.42).

Во втором случае (при $k_1=0$ и $k_3=1$) отливка имеет зернистое строение, состоит из равноосных кристаллов примерно одинаковых размеров. Если уменьшить размер зерна d , а k_4 приблизить к нулю (мелкодисперсная субструктура), то механические свойства резко усиливаются.

Для сплавов, содержащих эвтектику, необходимы и другие показатели. Например, в серых чугунах показатель k_3 характеризует средний относительный размер эвтектических колоний. Однако важным является размер и форма графита в этих колониях. Обычно их характеризуют отношением средней длины к средней ширине графитовых включений R_g . С увеличением скорости затвердевания R_g уменьшается, т.е. выделения графита становятся более компактными.

Рассмотрим основные закономерности формирования структурных зон в отливках. После заливки перегретого сплава в форму вблизи ее поверхности расплав быстро переохлаждается ниже температуры кристаллизации.

На стенке формы или на содержащихся в сплаве затравках в тонком переохлажденном слое начинается объемное зарождение и рост кристаллов. При этом выделяется теплота кристаллизации, которая приводит к увеличению температуры и снятию переохлаждения. Распределение температуры в поверхностном слое отливки показано на рис. 3.46. Видно, что перед фронтом кристаллизации термическое переохлаждение меньше интервала метастабильности по зарождению. Поэтому перед фронтом зарождения рост новых кристаллов не происходит, а осуществляется рост ранее образованных центров.

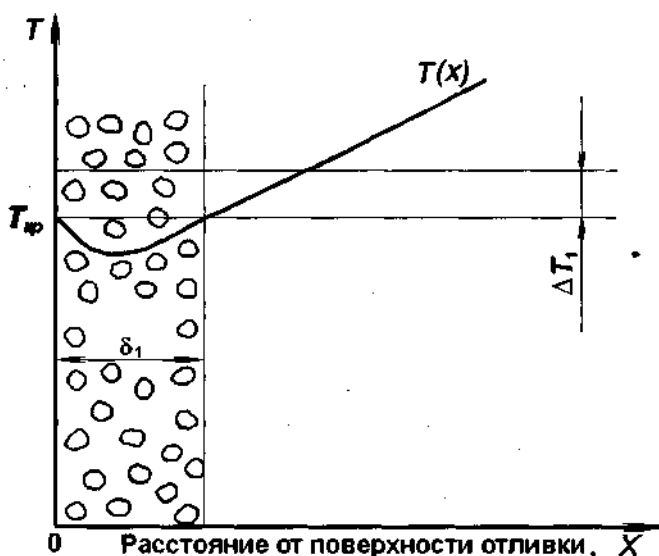


Рис. 3.46. Распределение температуры в поверхностном слое отливки

Преимущественная ориентировка столбчатых кристаллов соответствует направлению теплоотвода, так как скорость их роста наибольшая. Кристаллы, имеющие другую, менее благоприятную, ориентировку, при росте выклиниваются.

В сплавах, как известно, может иметь место не только термическое, но и концентрационное переохлаждение на фронте кристаллизации. Наличие этого переохлаждения увеличивает скорость роста кристаллов на фронте кристаллизации, т.е. способствует столбчатой кристаллизации.

На рис. 3.47 показано распределение температуры в сплаве (t_1 – t_3), температуры ликвидуса 1 и начала зарождения кристаллов 2. Видно, что в момент времени t_1 температура сплава выше температуры зарождения кристаллов. При этом выделение кристаллов перед фронтом кристаллизации не происходит и имеет место столбчатый рост. С течением времени градиент температур в сплаве уменьшается, и в момент времени, больший t_2 , переохлаждение сплава перед фронтом кристаллизации превысит интервал метастабильности ΔT_1 . Это приведет к зарождению и самостоятельному росту кристаллов перед фронтом кристаллизации. При определенном количестве этих кристаллов столбчатый рост будет остановлен и в центре отливки образуется зона равноосных кристаллов.



Рис. 3.47. Распределение температур перед фронтом кристаллизации ($t_3 > t_2 > t_1$)

9.2. Химическая неоднородность сплава в отливках

Явление химической неоднородности сплава в отливках называется *ликвацией*. В зависимости от рассматриваемого объема различают микро- и макроликвацию. Микроликвация связана с химической неоднородностью в пределах объема растущего кристалла (внутрикристаллическая ликвация) или в пределах объема зерна (дендритная ликвация). Макроликвация связана с неоднородностью состава сплава в отдельных зонах отливки, поэтому ее часто называют зональной ликвацией.

При дендритной кристаллизации ($k_0 < 1$) междендритные объемы сплава обогащены легирующим компонентом, что определяет химическую неоднородность сплава в пределах зерна. При прокатке сплавов этот вид неоднородности проявляется в получении полосчатых структур.

Различают нормальную и обратную зональную ликвацию. При нормальной ликвации (рис. 3.48, а) (для сплавов с $k_0 < 1$) центральные участки обогащены легирующим компонентом, а при обратной ликвации (рис. 3.48, б), наоборот, поверхностные слои отливки содержат легирующий компонент в большем количестве, чем центральные.

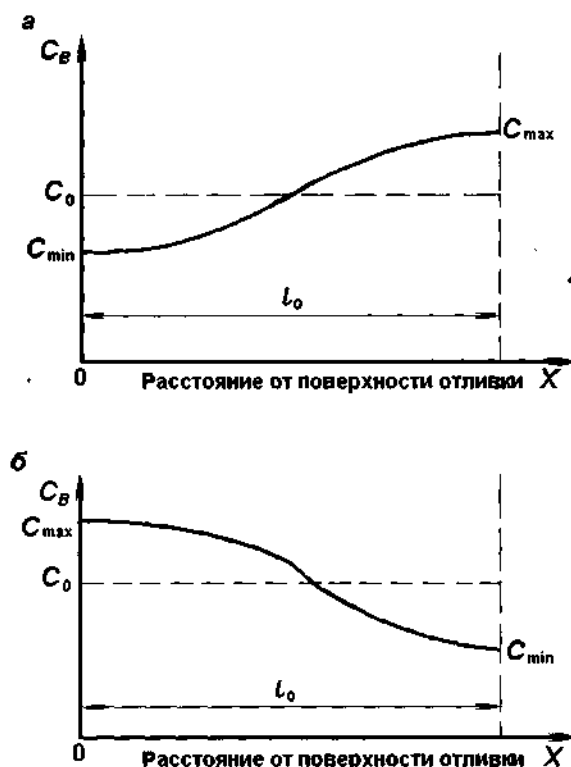


Рис. 3.48. Распределение концентрации легирующего компонента при нормальной (а) и обратной (б) ликвации сплава

Нормальная ликвация объясняется тем, что при $k_0 < 1$ во время роста кристалла перед фронтом кристаллизации выталкивается избыточное количество легирующего компонента, поток которого, направленный к центральным слоям отливки, равен $(C_L - C_S)v$. Чем меньше k_0 , тем сильнее проявляется химическая зональная неоднородность. В сталях наиболее подвержены ликвации сера ($k_0=0,02$), кислород ($k_0=0,02$), фосфор ($k_0=0,13$), углерод ($k_0=0,13$). Ликвация углерода, серы и фосфора в сталях может достигать 300 % и более.

Наиболее интенсивное распространение нормальная зональная ликвация имеет в верхней подприбыльной части отливки, так как она затвердевает в последнюю очередь (рис. 3.49). В верхней подприбыльной части

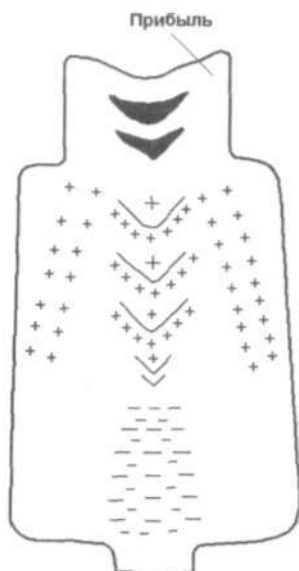


Рис. 3.49. Схема расположения нормальной зональной ликвации в стальном слитке

имеем V -образную положительную ликвацию ($C_s > C_0$). V -образный характер ликвационных зон обусловлен движением расплава из прибыли в ходе компенсации усадки. В нижней части слитка имеет место зона отрицательной ликвации ($C_s < C_0$). Ее наличие объясняется ликвацией в жидком состоянии при падении вниз сравнительно чистых по ликвирующим элементам (S, C, P) кристаллов (конус охлаждения). Область положительной ликвации, смещенная относительно оси отливки, имеет обратную конусность по сравнению с зоной осевой ликвации. Она располагается на границе столбчатой и центральной равноосной зон слитка.

При обратной зональной ликвации (см. рис. 3.48, б) поверхностные слои обогащены легирующим компонентом. Их состав практически соответствует составу сплава, затвердевающему в последнюю очередь. Образование обратной ликвации можно объяснить направленным движением жидкого сплава из центральных участков по междендритным каналам к поверхности отливки. Это движение может быть вызвано несколькими причинами. Во-первых, при кристаллизации из расплава выделяются газы, давление которых на расплав обеспечивает его движение по межкристаллитным каналам. Вследствие усадки отливки по периметру затвердевшей

корки давление помещенного в ней расплава увеличивается, обеспечивая проникновение сплава через межкристаллитные каналы к поверхности отливки путем продавливания. Наконец, как будет показано в гл. 10 разд. 3, при затвердевании сплава понижается давление расплава и он как бы засасывается в междендритные каналы.

Очевидно, что благоприятные условия для развития обратной ликвации создаются при широком интервале кристаллизации и объемном затвердевании, при малом коэффициенте распределения k_0 и большой объемной усадке при затвердевании и в твердом состоянии.

Особенно склонны к образованию обратной ликвации медные сплавы, содержащие свинец и олово. В таких сплавах давление на расплав в межкристаллитных каналах может быть настолько большим, что расплав прорывает затвердевшую корку. Происходит, как говорят, «выпотевание» олова или свинца.

Зональную ликвацию можно уменьшить, повышая скорость затвердевания. Однако при этом увеличивается внутрикристаллическая ликвация. Конкретные меры по предотвращению ликвации рассматриваются в технологических разделах спецкурса.

Особое место занимает ликвация по плотности, при которой фазы, обогащенные тяжелым компонентом, опускаются в нижние слои отливки, а фазы, обогащенные легким компонентом, всплывают вверх. Примером такой ликвации является описанное выше образование нижнего конуса осаждения в стальных слитках. Особенно сильно проявляет себя этот вид ликвации в сплавах, содержащих свинец. Радикальным методом уменьшения данного вида ликвации является увеличение скорости затвердевания.

Глава 10. МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ КРИСТАЛЛИЧЕСКИМ СТРОЕНИЕМ ОТЛИВКИ

В зависимости от назначения и требований, предъявляемых к отливке, она должна обладать той или иной кристаллической структурой. Рассмотренные выше закономерности и механизмы кристаллизации металлов и сплавов позволяют выделить следующие направления управления кристаллической структурой отливок:

- управление тепловым режимом плавки, заливки и затвердевания;
- модифицирование сплавов;
- физико-химические методы воздействия на жидкий расплав.

10.1. Влияние теплового режима плавки, заливки и затвердевания сплава

В изложенных в предыдущих главах теоретических построениях предполагалось, что теплота кристаллизации отводится беспрепятственно. В реальных условиях кристаллическая структура формируется в результате сложного динамического взаимодействия элементарных процессов зарождения и роста кристаллов с процессами отвода теплоты кристаллизации и диффузионного перераспределения примесей. В конечном итоге влияние теплового режима охлаждения отливки осуществляется через переохлаждение. Очевидно, что возрастание скорости охлаждения, т.е. теплового потока от отливки к форме, приводит к увеличению переохлаждения и, как следствие, к повышению СВЦК n и линейной скорости роста v , т.е. скорости кристаллизации. Поэтому применение высокотеплопроводных формовочных материалов, переход на литье в металлические формы, применение водоохлаждаемых форм приводят к измельчению кристаллического зерна d .

Однако, как показали результаты исследований Г.Ф. Баландина, такой вывод нельзя сделать однозначно. Как видно на рис. 3.45, *а*, размер зерна в равноосной зоне d и длина столбчатой зоны $l_{ст}$ находятся в прямой зависимости: чем меньше $l_{ст}$, тем меньше d . Это соответствует механизму зональной кристаллизации, рассмотренному в гл. 9. Действительно, продвижение столбчатой зоны останавливается кристаллами, зарождающимися и растущими в объеме расплава перед столбчатой зоной. Чем раньше и в большем количестве появятся в расплаве кристаллы, тем быстрее остановится столбчатая кристаллизация. При заливке сплава происходит его час-

тичная кристаллизация на стенках литниковых каналов. При этом в зависимости от условий заливки и охлаждения сплава определенная часть кристаллов смывается потоком сплава и уносится вместе с ним в полость формы. С увеличением скорости охлаждения количество смытых и не расплавившихся в сплаве кристаллов возрастает. Они-то и являются идеальными затравками для зарождения кристаллов. Поэтому с повышением скорости охлаждения увеличивается СВЦК. Этот фактор способствует более ранней остановке роста столбчатых кристаллов.

С другой стороны, увеличение скорости охлаждения повышает скорость продвижения фронта кристаллизации, т. е. способствует увеличению протяженности зоны столбчатых кристаллов и измельчению зерна d .

Таким образом, влияние скорости охлаждения противоречиво. При кристаллизации отливок из сплавов с высокой теплопроводностью (медь, алюминий и сплавы на их основе) скорость охлаждения не будет играть решающей роли. В этом случае при любых реальных скоростях охлаждения градиент температур GR в расплаве очень мал и, если бы в расплаве не было затравок, инициирующих зарождение кристаллов, всегда имела бы место транскристаллизация ($I_{ст}=I_0$). В этих условиях увеличение скорости охлаждения, способствуя появлению в расплаве смытых потоком сплава обломков кристаллов, приводит к сокращению протяженности столбчатых кристаллов $I_{ст}$ и измельчению зерна.

Для сплавов с низким коэффициентом теплопроводности (стали, чугуны) характерны значительные градиенты температур по сечению отливки, величину которых можно регулировать, изменяя тепловой поток от отливки к форме, т.е. скоростью охлаждения. С повышением скорости охлаждения возрастает градиент температур GR , уменьшается концентрационное переохлаждение перед фронтом кристаллизации и, следовательно, увеличивается протяженность столбчатой зоны и измельчается зерно.

При очень малых скоростях охлаждения, например при литье в песчаные формы, затвердевание широкоинтервальных сплавов происходит объемно (все сечение отливки охвачено жидко-твердой зоной). При этом в структуре отсутствуют замороженная и столбчатая зоны. В этих условиях, естественно, увеличение скорости охлаждения приводит к измельчению зерна.

Важным фактором, определяющим кристаллическую структуру отливки, является температура перегрева сплава при плавке и при заливке. Из практики известно, что с увеличением перегрева возрастает длина столбчатой зоны. Влияние перегрева можно объяснить исходя из тепловых

соображений и с точки зрения его воздействия на кристаллизационные параметры n и v . Тепловая сторона вопроса при этом не имеет решающего значения, хотя здесь можно выделить два эффекта. С одной стороны, отвод теплоты перегрева повышает температуру формы к началу затвердевания и поэтому снижает скорость охлаждения. С другой стороны, увеличение перегрева сплава способствует развитию конвекции, которая задерживает охлаждение расплава и способствует росту столбчатой зоны. Решающее значение имеет влияние перегрева на кристаллизационную активность примесей, содержащихся в расплаве. С увеличением перегрева выше некоторого значения произойдет дезактивация примесей, поэтому возрастет длина столбчатых кристаллов.

Таким образом, целенаправленно варьируя тепловые условия плавки, заливки и затвердевания сплава, можно в широких пределах изменять кристаллическую структуру отливок.

10.2. Модифицирование сплавов

В гл. 4 для оценки эффективного размера зерна отливки при объемной кристаллизации получена формула, из которой видно, что для измельчения зерна необходимо увеличить скорость возникновения центров кристаллизации n или снизить линейную скорость роста (уменьшить коэффициент m).

$$d = \sqrt[3]{\frac{6}{\pi K}} \cdot \sqrt[3]{\frac{\left(\frac{E^3 m^9}{n_0^5}\right)^{\frac{1}{8}}}{B^{\frac{1}{2}}}}.$$

При этом наибольший эффект достигается, если осуществить эти мероприятия одновременно. Как показано выше, линейная скорость роста v и скорость возникновения центров кристаллизации n зависят от переохлаждения, а коэффициенты n_0 и m являются характеристиками, определяющими склонность сплава к зародышеобразованию и росту кристаллов. Эти характеристики очень чувствительны к наличию в расплаве различных примесей. Практика показывает, что достаточно ввести в сплав малейшее количество примесей, чтобы его кристаллическая структура резко изменилась. Процесс управления размерами и морфологией кристаллов в отливке путем

введения в расплав небольших количеств некоторых веществ называется *модифицированием*. При этом вводимые в расплав вещества называются модификаторами. Различают модифицирование первого и второго рода.

Модифицирование первого рода направлено на измельчение кристаллической структуры и уменьшение длины столбчатой зоны путем воздействия на скорость возникновения центров кристаллизации. *Модифицирование второго рода* направлено на измельчение кристаллической структуры и улучшение морфологии кристаллов путем воздействия главным образом на линейную скорость роста. При комплексном модифицировании осуществляется воздействие на оба кристаллизационных параметра, т.е. на m и n_0 .

Все примеси, содержащиеся в расплаве или целенаправленно вводимые в него, можно разделить на две группы: растворимые и нерастворимые в жидком сплаве.

Нерастворимые тугоплавкие примеси, находящиеся в расплаве, могут обеспечивать гетерогенное зародышеобразование, увеличивая n_0 . Из теории гетерогенного зародышеобразования (гл. 2) известно, что эффективность твердой подложки тем выше, чем больше $\cos \theta$ (θ — угол смачивания).

Выше было сформулировано понятие изоморфности включений, характеризующейся идентичностью типа их кристаллической решетки и близостью ее параметров параметрам кристаллической решетки сплава. С этой точки зрения идеальными модификаторами будут нерасплавленные включения самого твердого сплава или активированные сплавом включения.

Для снижения линейной скорости роста кристаллов при модифицировании второго рода в расплав вводят растворимые в нем вещества. Эффект модифицирования при выделении растворимых примесей был открыт в 1896 г. А. Минетом, который заметил, что при введении в силумины небольших добавок натрия резко измельчаются выделения кремния и меняется их морфология. Теоретические основы данного вида модифицирования заложены в трудах А.А. Байкова, В.И. Данилова, М.В. Мальцева, П.Я. Ребиндера, В.К. Семенченко, и др.

Все *растворимые примеси* можно разделить на несколько групп в зависимости от их поверхностных свойств и растворимости в твердых растворах сплава. Поверхностно-активные примеси, например цинк и натрий в алюминии и его сплавах, в основном концентрируются на межфазных границах сплава, следовательно, и перед фронтом кристаллизации. При этом затрудняются необходимые для роста концентрационные флуктуации и массоперенос частиц из жидкого сплава к растущему кристаллу. Все это приводит к снижению линейной скорости роста и измельчению структуры.

Например, введение десятых долей процента цинка в алюминий резко измельчает его кристаллическое строение.

Однако поверхностно-активное вещество концентрируется и на границе расплава с изоморфными примесями, затрудняя процесс гетерогенного зародышеобразования на них. Это явление называется *отравлением модификаторов*. Например, введение цинка в алюминиевый сплав, модифицированный титаном, приводит к укрупнению зерна по сравнению со сплавом, модифицированным только титаном.

Для комплексного модифицирования целесообразно комбинировать применение модификаторов первого рода с вводом веществ, растворимых в жидком сплаве и практически нерастворимых в твердых растворах. При росте кристалла эти примеси выталкиваются в жидкий сплав перед фронтом кристаллизации и в конечном итоге влияют на скорость роста аналогично поверхностно-активным примесям. Однако, естественно, отравления изоморфных примесей при этом не происходит. Например, при одновременном модифицировании алюминия титаном и никелем достигается более сильный эффект, чем при их раздельном применении.

В настоящее время предложено большое число механизмов модифицирования. Не имея возможности в рамках курса дать анализ всех этих механизмов, рассмотрим один из подходов, который непосредственно связан с современной теорией жидкого состояния металлов. Этот подход интенсивно развивается Г.С. Ершовым, Ю.Б. Бычковым, И.В. Гаврилиным и др.

Как было показано в разд. 1, жидкие металлы состоят из кластеров, в основном сохраняющих структуру твердого состояния, и межкластерных пространств. Кластеры и межкластерные пространства находятся в сложном динамическом взаимодействии друг с другом. Кластеры служат естественными центрами кристаллизации. Однако для начала кристаллизации необходимо, чтобы хотя бы отдельные кластеры достигли определенного критического размера. С увеличением переохлаждения размеры кластеров возрастают, что делает их реальными центрами кристаллизации.

При введении в сплав растворимых веществ в процессе кристаллизации при переохлаждении они перераспределяются между кластерами и межкластерными пространствами. Так как строение кластера близко к структуре твердого металла, то естественно предположить, что растворимость веществ в кластерах того же порядка, что и в твердом металле. А поскольку растворимость в твердом металле значительно меньше, чем в жидком, то растворенное в сплаве вещество в гораздо меньшем количестве растворится в кластерных объемах, чем в межкластерных. Присутствие значительного числа примесных атомов в межкластерных объемах может

изменить характер связи между кластерами, усилив или ослабив ее. Если связь усиливается, то это способствует объединению кластеров, росту их размеров, т.е. облегчает достижение кластерами критических размеров и, следовательно, зародышеобразование. В противоположном случае зародышеобразование затрудняется и соответствующие вещества будут демодификаторами. Для характеристики влияния растворимого в сплаве вещества на взаимосвязь кластеров введем критерий $\mu = \frac{x_m - x_v}{C_{\kappa\lambda}^a}$, где x_m и x_v –

электроотрицательность металла и растворенного в нем вещества; $C_{\kappa\lambda}^a$ – растворимость вещества в кластере.

Электроотрицательность x , по Л.К. Полингу, равна $0,31 \cdot \left(\frac{n+1}{r} + 0,5 \right)$,

где n – число валентных электронов; r – ковалентный радиус вещества. Если $\mu > 0$, то вещество является модификатором. При этом, чем больше μ , тем сильнее модифицирующее действие. При $\mu < 0$ вещество является демодификатором. Расчеты позволили получить следующий ряд модификаторов второго рода для алюминиевых сплавов (в порядке ослабления модифицирующего действия): Jn, Co, Nd, Ce, Na, Ba, Ca, Cd, Hf, Mn, Mg. В основном полученные результаты соответствуют практике. Однако есть и противоречия. Например, по этому критерию Ge попадает в список демодификаторов, хотя известно, что это типичный модификатор, при применении которого эффект модифицирования силумина сохраняется дольше, чем при использовании натрия.

Для уменьшения протяженности зоны столбчатых кристаллов в соответствии с рассмотренной в гл. 9 теорией следует увеличивать СВЦК и уменьшать линейную скорость роста. Поэтому все перечисленные выше методы приведут к сокращению длины столбчатых кристаллов и измельчению зерна. Например, отливки из алюминия А999 имеют сквозную транскристаллизацию, а технический алюминий в тех же условиях обладает мелкодисперсной структурой.

Важным средством измельчения кристаллической структуры отливки является суспензионное литье. В этом случае в расплав добавляют до 5 % порошкообразных добавок – микрохолодильников. В качестве дисперсных инокуляторов применяют порошки, гранулы, дробь железа, алюминия, меди и т.д. При этом в 1,5–2 раза снижается температурный градиент на фронте кристаллизации, что приводит к расширению зоны переохлажденного сплава перед фронтом кристаллизации. Поэтому уменьшается длина

столбчатой зоны и измельчается зерно. Это только один взгляд на механизм действия микрохолодильников. Если микрохолодильники не расплавляются, то они являются готовыми затравками для кристаллизации. При их расплавлении увеличивается микронеоднородность расплава, вызванная появлением инициированных микрохолодильниками кластеров. Это также способствует измельчению зерна. Технологические аспекты суспензионного литья рассматриваются в технологических курсах.

В практике управления кристаллической структурой отливок большое значение имеет не только измельчение кристаллитов, но и придание им оптимальной формы с точки зрения эксплуатационных свойств. Для решения этой задачи применяют модификаторы второго рода. Классическим примером оптимизации формы кристаллов является модифицирование силуминов и чугунов.

Структура литого силумина была рассмотрена выше. Эвтектика силумина содержит выделение высококремнистой фазы в виде игл, прорезающих основную матрицу. Создавая надрезы, эти иглы резко снижают прочность и пластичность сплава. Для перевода кремниевых выделений в компактную форму применяют модифицирование натрием, германием и стронцием. Существует много теорий, объясняющих эффект модифицирования. Однако главным является то, что эти модификаторы – поверхностно-активные вещества, выделяющиеся на границе раздела фаз и препятствующие неконтролируемому росту фазы, снижая скорость ее роста. На рис. 3.50 приведены структуры силумина. Видно, что фронт кристаллизации модифицированных силуминов приближается к изотермическому.

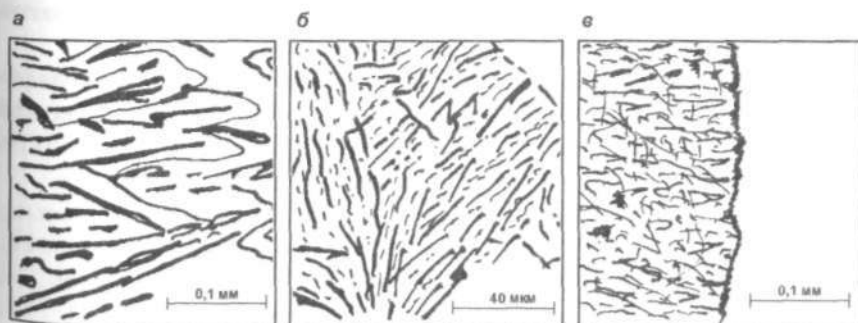


Рис. 3.50. Виды структур силумина:

- а – закаленный фронт кристаллизации эвтектики сплава системы Al–Si;
- б – поперечное сечение структуры аналогичного немодифицированного сплава;
- в – поперечное сечение структуры модифицированного сплава

Аналогичного эффекта можно добиться и без модифицирования при больших скоростях охлаждения.

Структура серого чугуна с пластинчатым и шаровидным графитом была рассмотрена выше. Для получения шаровидного графита применяют модифицирование магнием, церием и другими модификаторами. Существует несколько точек зрения на механизм такого модифицирования. Подробнее этот вопрос будет рассмотрен в курсе «Производство чугунного и стального литья». Здесь же отметим, что при очень малом содержании серы можно получить шаровидный графит без модифицирования при соответствующей скорости охлаждения. С увеличением содержания серы необходимая скорость охлаждения увеличивается и при характерном для промышленных чугунов уровне (0,05–0,15 %) становится реально недостижимой. Поэтому на практике применяют модифицирование. Сера является поверхностно-активным веществом, которое на начальных стадиях роста графита способствует его расщеплению, т.е. ранее компактный зародыш в местах адсорбции серы начинает разветвляться. Такое воздействие серы связано с кристаллографическими особенностями графита, имеющего гексагональную решетку с ослабленными связями между базисными плоскостями (именно поэтому мы и пользуемся графитовыми карандашами). Пластика графита утрачивает компактность и начинает ветвиться, что в конечном итоге приводит к образованию разветвленного кристалла.

Один из механизмов действия магния сводится к обессериванию чугуна по реакции $Mg+S=MgS$. При этом резко увеличивается межфазное натяжение, что способствует переходу пластинчатой эвтектики в шаровую. Избыточный магний как поверхностно-активное вещество выделяется на границе образовавшегося сферолита графита и препятствует его разветвлению в ходе дальнейшего роста.

Более подробно теоретические и технологические основы модифицирования силуминов и чугунов будут рассмотрены в технологических курсах.

10.3. Физико-химические методы управления формированием кристаллической структуры отливок

Для управления формированием кристаллического строения отливок широко применяются воздействия на расплав, основанные на различных физических, физико-химических и механических явлениях. Применение этих методов целесообразно в тех случаях, когда другие методы, например

модифицирование, оказываются малозффективными. В первую очередь это относится к крупным отливкам с большими размерами сечений, так как возможны большие неоднородности структуры и химического состава сплава по объему отливки.

Среди известных физических методов измельчения зерна следует отметить вибрацию, электромагнитное, или индукционное, перемешивание и ультразвуковую обработку расплава. Перемешивание расплава не только обеспечивает выравнивание его состава по объему, но и в результате смыва с фронта кристаллизации обломков кристаллов вызывает измельчение зерна из-за облегчения зародышеобразования на обломках кристаллов и активных частицах, содержащихся в них. При этом ускоряются процессы диффузии, способствующие образованию зародышей.

Перемешивание достигается с помощью механических, электромагнитных и ультразвуковых устройств. Наиболее эффективно применение динамических методов перемешивания, таких как вибрация, наложение ультразвуковых колебаний и электромагнитное перемешивание.

Первые указания о пользе *вибрации* даны Д.К. Черновым. В большинстве устройств вибрация от механического, пневматического или электромагнитного вибратора передается не расплаву непосредственно, а литейной форме. Частота колебаний обычно находится в пределах от 50 до 300 Гц. Анализ действия вибрации показал, что не только происходит измельчение зерна, но и затвердевание сплава становится более последовательным. Интенсивно перемешивающийся жидкий сплав оплавляет и разрушает фронт кристаллов, растущих от стенок формы. При этом сокращается длина столбчатой зоны, измельчается зерно и, так как быстрее снимается перегрев сплава, ускоряется его затвердевание.

Эффективным методом воздействия вибрации является заливка форм сплавом через вибрирующее заливочное устройство (воронку или желоб). Механизм действия вибрации связывают с модифицирующим действием обломков сплава, смытых со стенок заливочного устройства.

При *ультразвуковой обработке* в расплаве возбуждаются вибрации ультразвуковой частоты. Воздействия ультразвуковых колебаний на кристаллизующийся сплав, кроме отмеченного выше эффекта смыва кристаллов, сводятся к следующему.

Прежде всего, ультразвук может вызвать диспергирование уже появившихся в расплаве кристалликов. Кроме того, ультразвуковые колебания создают более благоприятные условия для самопроизвольного зарождения центров кристаллизации главным образом за счет повышения вероятности флуктуации энергии в результате знакопеременного давления

при распределении упругой волны и развития в расплаве кавитации. Известно, что волна представляет собой пространственно-временное чередование зон повышенного давления и разрежения. В местах разрежения происходит испарение жидкости, кавитационный разрыв и образование пузырька. Это явление называется кавитацией. При повышении давления, наступающем в этой зоне в последующий момент времени, происходит захлопывание пузырька, которое вызывает местное повышение давления в расплаве до 100 МПа. Известно, что температура плавления в соответствии с уравнением Клаузиуса–Клапейрона изменяется с ростом давления по закону

$$\frac{dT}{dP} = \frac{T_{n1}(V_{жс} - V_{мс})}{L}, \text{ т.е. } T_{n1} = \frac{L \cdot dT}{(V_{жс} - V_{мс}) \cdot dP}.$$

Подставив это выражение в формулу для вычисления радиуса критического зародыша (см. гл. 2), получаем

$$r_{кр} = \frac{2\sigma \cdot dT}{\rho \cdot \Delta T \cdot (V_{жс} - V_{мс}) \cdot dP}.$$

Отсюда следует, что с ростом давления уменьшается размер критического зародыша и работа его образования. Поэтому с ростом давления увеличивается СВЦК, что приводит к измельчению структуры.

При непрерывной ультразвуковой обработке вследствие сильного звукопоглощения расплавом излучатель нагревается, что вызывает акустический нагрев сплава и расплавление возникших кристаллов. Поэтому следует применять прерывистое облучение сплава, устраивая между периодами колебаний паузы. Применение ультразвука позволяет достичь значительного эффекта, при этом зерно может измельчаться в 50–100 раз.

Электромагнитное перемешивание расплава в металлургическом производстве применяется преимущественно для интенсификации процесса производства стали в электропечах. Оно происходит под влиянием электродинамических усилий, возникающих в жидкой ванне при питании индукционного устройства переменным током, который, проходя по витку (первичная сеть), наводит в жидком сплаве (вторичная сеть) электродвижущую силу. В результате взаимодействия электромагнитных полей индуктора и тока в расплаве возникают электродинамические усилия, приво-

дящие его в движение. Чаще всего электромагнитное перемешивание применяют для перемешивания расплава в кристаллизаторе при непрерывном литье.

В настоящее время для управления структурой отливок начинают применять другие физические эффекты: рентгеновское, лазерное и γ -облучение расплава.

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое зародыш и центр кристаллизации? От чего зависит критический размер зародыша?
2. Напишите формулу для вычисления СВЦК. Охарактеризуйте зависимость СВЦК от переохлаждения при гомогенном зародышеобразовании.
3. Объясните роль затравок в зародышеобразовании. В чем суть принципа ориентационно-размерного соответствия?
4. Поясните механизмы роста кристаллов. Охарактеризуйте зависимость линейной скорости роста от переохлаждения.
5. Назовите кристаллизационные параметры и объясните их влияние на размер зерна при объемной кристаллизации.
6. Как происходит перераспределение примесей при кристаллизации сплавов? Что такое дендритная ликвация?
7. Какова роль диффузии при перераспределении примесей?
8. Что такое концентрационное переохлаждение?
9. Выведите и проанализируйте условие устойчивости плоского фронта кристаллизации.
10. В чем заключаются особенности ячеистой кристаллизации?
11. В чем заключаются условия дендритной кристаллизации?
12. Назовите особенности кристаллизации регулярных эвтектик.
13. Назовите особенности кристаллизации нерегулярных эвтектик.
14. Что такое модифицирование 1-го рода?
15. Что такое модифицирование 2-го рода?
16. Что такое комплексное модифицирование?
17. Почему дополнительное модифицирование цинком алюминиевого сплава с 0,1 % Ti приводит к укрупнению зерна?
18. Как происходит формирование структурных зон в отливках?
19. Как влияет скорость охлаждения сплава на размер зерна и длину столбчатой зоны?

20. Как влияет на структуру отливок перегрев сплава при плавке и повышение температуры заливки?

21. Поясните механизмы влияния перемешивания, вибрации и ультразвука на структуру отливок.

22. Определите, устойчив или нет плоский фронт кристаллизации при следующих условиях: $GR=0,1$ К/см; $K_0=0,3$; $v=0,5$ мм/с; $m=7$ К/%; $C_0=7\%$; $D=30$ см²/с.

23. Определите максимальную величину концентрационного переохлаждения $\Delta T_{к\text{ макс}}$. Какую форму будут иметь кристаллы: полиэдрическую или разветвленную (ячеистую или дендритную)? Как следует изменить коэффициент диффузии D за счет перемешивания расплава, чтобы изменить форму кристаллов? Условия задачи приведены в таблице.

Примечание. Примите равными для всех вариантов следующие величины: $GR=100$ К/см; $v=0,001$ см/с.

Исходные данные

Номер варианта	Сплав	C_0 , %	m , К/%	K_0	D , см ² /с
1	Al-Si	1,5	6,64	0,128	$12,8 \cdot 10^{-5}$
2	Al-Si	1,2	6,64	0,128	$12,8 \cdot 10^{-5}$
3	Al-Si	1,0	6,64	0,128	$12,8 \cdot 10^{-5}$
4	Al-Si	0,8	6,64	0,128	$12,8 \cdot 10^{-5}$
5	Al-Si	0,6	6,64	0,128	$12,8 \cdot 10^{-5}$
6	Al-Cu	2,0	3,40	0,170	$1,5 \cdot 10^{-5}$
7	Al-Cu	3,0	3,40	0,170	$1,5 \cdot 10^{-5}$
8	Al-Cu	4,0	3,40	0,170	$1,5 \cdot 10^{-5}$
9	Al-Cu	5,0	3,40	0,170	$1,5 \cdot 10^{-5}$
10	Al-Cu	6,0	3,40	0,170	$1,5 \cdot 10^{-5}$
11	Al-Mg	7,0	6,00	0,440	$0,5 \cdot 10^{-5}$
12	Al-Mg	8,0	6,00	0,440	$0,5 \cdot 10^{-5}$
13	Al-Mg	10,0	6,00	0,440	$0,5 \cdot 10^{-5}$
14	Al-Mg	12,0	6,00	0,440	$0,5 \cdot 10^{-5}$
15	Al-Mg	14,0	6,00	0,440	$0,5 \cdot 10^{-5}$

РАЗДЕЛ 4. УСАДОЧНЫЕ ЯВЛЕНИЯ ПРИ ФОРМИРОВАНИИ ОТЛИВКИ

При формировании отливок происходят фазовые превращения, сопровождающиеся объемными изменениями. Большинство металлов и сплавов затвердевают с уменьшением объема. При охлаждении затвердевших отливок с некоторыми сплавами, например железоуглеродистыми, происходят полиморфные превращения с изменением удельного объема фаз.

Как известно, при охлаждении все тела уменьшают свой объем и линейные размеры. Так как температурное поле формирующейся отливки неоднородно, указанные объемные изменения в разных участках отливки развиваются в неодинаковой степени, что вызывает напряженное состояние отливки и появление в ней различных дефектов в виде пор и усадочных раковин.

Совокупность всех объемных и размерных изменений при формировании отливок и сопутствующие им физические процессы называют *усадочными явлениями*.

Глава 1. ФИЗИЧЕСКАЯ ПРИРОДА УСАДКИ. ОБЪЕМНАЯ И ЛИНЕЙНАЯ УСАДКА

Как было показано в разд. 1, тепловое движение в жидкости имеет две составляющие: колебательную и трансляционную. Время колебаний частиц около фиксированного положения, называемое временем оседлой жизни, с ростом температуры уменьшается. Следовательно, с повышением температуры увеличивается доля трансляционного движения, что должно приводить к усилению тенденции удаления частиц друг от друга на большие расстояния, т.е. к увеличению удельного объема жидкости.

В соответствии с кластерной теорией строения жидкости при повышении температуры происходит разупорядочение строения кластеров, возрастание межкластерных расстояний в жидкости, что также приводит к увеличению ее объема.

Указанные явления обуславливают уменьшение объема, т.е. *объемную усадку*, при охлаждении всех жидких металлов и сплавов. Зависимость объема жидкого сплава от температуры может быть выражена формулой

$$V = V_0(1 - \alpha_{V_{ж}}(T_0 - T)),$$

где V_0 – объем сплава при температуре T_0 после его заливки в форму;

$\alpha_{Vж}$ – коэффициент температурного расширения сплава в жидком состоянии.

Величина $\alpha_{Vж}$ зависит от природы и состава сплава. Она имеет порядок 10^{-4} K^{-1} . Например, $\alpha_{Vж}$ для углеродистой стали находится в диапазоне $0,4 \cdot 10^{-4} - 1,6 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$. Повышение содержания углерода в стали приводит к увеличению $\alpha_{Vж}$ примерно на 20 % на 1 % углерода. Аналогично влияет на величину $\alpha_{Vж}$ стали и кремний. Коэффициент объемного расширения силуминов изменяется в пределах $(1+1,5) \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$.

Объемную усадку в жидком состоянии определяют по формуле

$$V = V_0 (1 - \alpha_{Vж} (T_0 - T_{\text{л}})),$$

где $T_{\text{л}}$ – температура ликвидуса сплава.

Обычно вычисляют относительную объемную усадку:

$$\varepsilon_{Vж} = \frac{\Delta V}{V_0} \cdot 100\% \text{, или } \varepsilon_{Vж} = \alpha_{Vж} (T_0 - T_{\text{л}}).$$

Здесь $\alpha_{Vж}$ – коэффициент объемной усадки в жидком состоянии, равный коэффициенту температурного расширения сплава, выраженному в %/K. Для сталей $\alpha_{Vж} = (1+1,6) \cdot 10^{-2} \text{ %/K}$, для силуминов $\alpha_{Vж} = (1+1,5) \cdot 10^{-2} \text{ %/K}$. Физическая природа объемных изменений сплава при затвердевании подробно рассмотрена в разд. 1.

Относительная объемная усадка сплава при затвердевании $\varepsilon_{Vз} = (V_{\text{л}} - V_{\text{с}}) \frac{100\%}{V_{\text{л}}}$ имеет порядок 2,5 %. Величина $\varepsilon_{Vз}$ зависит от природы и состава сплава. У углеродистой стали $\varepsilon_{Vз}$ увеличивается с повышением содержания углерода с 2 % (при C=0,1 %) до 5,3 % (при C=0,7 %). Одной из причин указанного увеличения $\varepsilon_{Vз}$ является расширение интервала кристаллизации с повышением содержания углерода. Аналогично влияет на $\varepsilon_{Vз}$ снижение содержания кремния в силуминах. При уменьшении содержания кремния с 12 % (эвтектический сплав АК12) до 7 % (доэвтектический сплав АК7ч) $\alpha_{Vз}$ увеличивается с 3 до 3,8 %.

Практически у всех сплавов усадке при затвердевании предшествует *предусадочное расширение*, т.е. на начальных стадиях затвердевания имеет место некоторое увеличение объема. Предусадочное расширение связывают с выделением газов из жидкого сплава в процессе затвердевания и с выделением фаз, плотность которых меньше, чем у жидкого сплава. Осо-

бенно четко выявляется предусадочное расширение при затвердевании серого и высокопрочного чугуна. В этом случае при эвтектической кристаллизации, связанной с графитизацией, выделяется графит, плотность которого значительно меньше плотности чугуна. Предусадочное расширение серого чугуна с пластинчатым графитом составляет 0,1–0,2 %, у чугуна с шаровидным графитом оно начинается с момента кристаллизации отливки, продолжается до полного затвердевания чугуна и составляет 0,6–0,8 %. Предусадочное расширение уменьшает как суммарную объемную, так и линейную усадку в твердом состоянии. У белого чугуна предусадочное расширение отсутствует.

Предусадочное расширение в алюминиевых сплавах и сталях в пределах до 0,2 % связывают с переохлаждением и рекалесценцией, рассмотренными в разд. 3. При рекалесценции, сопровождающей переохлаждение, повышается (хотя и незначительно) температура сплава и замедляется выделение твердой фазы, что приводит к некоторому увеличению его объема. В экспериментах установлено, что предусадочное расширение имеет место в узкоинтервальных сплавах при наличии переохлаждения и рекалесценции вблизи температуры солидуса.

Усадка сплавов в твердом состоянии может рассматриваться как объемная и как линейная. *Линейная усадка* связана с уменьшением линейных размеров тела при понижении его температуры:

$$l = l_0 (1 - \alpha_l (T_c - T)),$$

где α_l — коэффициент линейного расширения.

Линейная относительная усадка вычисляется по формуле

$$\varepsilon_l = \frac{l_0 - l}{l_0} \cdot 100\% = \alpha_l (T_c - T) \cdot 100\%.$$

Величина α_l существенно зависит от температуры. Так, при повышении температуры от 0 до 600 °С α_l чистого железа изменяется от $11,6 \cdot 10^{-6}$ до $16 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$. Обычно в расчетах принимают коэффициент α_l постоянным, равным некоторому среднему значению. Полная относительная линейная усадка в твердом состоянии находится по формуле

$$\varepsilon_m = \alpha_l (T_c - T_k) \cdot 100\%.$$

где T_k — температура полностью охлажденной отливки.

Между линейной и объемной усадкой можно установить следующее соотношение. Если куб с длиной грани $l_0=1$ охладить на 1°C , то ребро куба будет иметь длину $l=(1-\alpha_\lambda)$. Объем куба равен $V=(1-\alpha_\lambda)^3=1-3\alpha_\lambda+3\alpha_\lambda^2-\alpha_\lambda^3$. Так как α_λ мало, то, пренебрегая α_λ^2 и α_λ^3 , получаем $V\approx 1-3\alpha_\lambda$, $\alpha_V = \frac{V_0 - V}{V_0} = 3\alpha_\lambda$. Таким образом, коэффициент объемной усадки в три раза больше коэффициента линейной усадки.

В железоуглеродистых сплавах в твердом состоянии происходит превращение аустенита γ в феррит α , сопровождающееся увеличением объема (около 1 %). Наименьшее увеличение имеет место при реализации перехода $\gamma \rightarrow \alpha$ в виде перлитного превращения, а наибольшее – при мартенситном превращении. Поэтому в сталях различают: доперлитную усадку $\varepsilon_{\delta,n}$ протекающую в температурном интервале от конца затвердевания до превращения $\gamma \rightarrow \alpha$; расширение $\gamma \rightarrow \alpha$ и послеперлитную усадку $\varepsilon_{n,n}$, протекающую при дальнейшем охлаждении стали. Поэтому объемная усадка твердого металла равна

$$\varepsilon_{Vm} = \varepsilon_{V\delta,n} - \varepsilon_{V\gamma \rightarrow \alpha} + \varepsilon_{Vn,n}.$$

Соответственно линейная усадка равна

$$\varepsilon_m = \varepsilon_{\delta,n} - \varepsilon_{\gamma \rightarrow \alpha} + \varepsilon_{n,n};$$

$$\varepsilon_{\delta,n} = \alpha_m^{\delta,n} (T_c - T_n);$$

$$\varepsilon_{n,n} = \alpha_m^{n,n} (T_n - T_\kappa),$$

где $\alpha_m^{\delta,n}$ и $\alpha_m^{n,n}$ – коэффициенты линейного термического расширения в соответствующих интервалах температур.

Полная объемная усадка углеродистых сталей в твердом состоянии ε_{Vm} равна 7,0÷7,5 % (соответственно линейная усадка $\varepsilon_m=2,4\pm 2,5$ %). Послеперлитная усадка ε_m близка к 1 % и не зависит от содержания углерода. Доперлитная усадка уменьшается по мере увеличения содержания углерода, так как при этом понижается температура солидуса. Аустенитные стали, например сталь 110Г13Л, имеют большую усадку в твердом состоянии, чем углеродистые ($\varepsilon_m=2,7\pm 2,9$ %). Линейная усадка серого чугуна с пластинчатым графитом составляет 0,6±0,9 %, у белого чугуна $\varepsilon_m=1,5\pm 1,7$ %. Линейная усадка алюминиевых сплавов колеблется в пределах от 0,8 % (сплав АК12) до 1,4 % (сплав АК7ч).

Физическая природа усадки в твердом состоянии была рассмотрена в разд. 1.

Глава 2. ВЛИЯНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ФАКТОРОВ НА УСАДКУ СПЛАВОВ В ОТЛИВКАХ

Объем затвердевшего металла в отливке меньше объема залитого в форму сплава, а линейные размеры отливки меньше соответствующих размеров литейной формы вследствие усадки:

$$\frac{V_{ж} - V_{к}}{V_{ж}} \cdot 100\% = \varepsilon_{V\Sigma} = \varepsilon_{V_{жк}} + \varepsilon_{V_3} - \varepsilon_{V_{n.p}} + \varepsilon_{V_m},$$

где $V_{ж}$ и $V_{к}$ — соответственно объемы залитого в форму сплава и охлажденной до конечной температуры отливки;

$\varepsilon_{V\Sigma}$ — суммарная относительная объемная усадка, %;

$\varepsilon_{V_{n.p}}$ — относительное объемное предусадочное расширение.

Приняв $V_{ж} = \frac{M}{\rho_{ж}}$, $V_{к} = \frac{M}{\rho_m}$, где $\rho_{ж}$ и ρ_m — соответственно плот-

ность сплава в жидком и твердом состояниях, получаем $\varepsilon_{V\Sigma} = 1 - \frac{\rho_{ж}}{\rho_m}$.

Для железоуглеродистых сплавов имеем

$$\varepsilon_{V\Sigma} = \varepsilon_{V_{жк}} + \varepsilon_{V_{\alpha}} + \varepsilon_{V_{\delta.n}} - \varepsilon_{V_{\alpha \rightarrow \gamma}} + \varepsilon_{V_{n.n}}.$$

Полная объемная усадка стали с увеличением содержания углерода увеличивается. При $C=0,1\%$ $\varepsilon_{V\Sigma}=10,5\%$, а при $C=1\%$ $\varepsilon_{V\Sigma}=14\%$. У стали с содержанием углерода $0,35\%$ при температуре заливки 1725°C $\varepsilon_{V_{жк}}=3,6\%$, $\varepsilon_{V_3}=2,7\%$, $\varepsilon_{V_m}=7,2\%$. При этом объемное расширение при перлитном превращении $\varepsilon_{V_{\alpha \rightarrow \gamma}}$ составляет $0,33\%$, т.е. около $2,5\%$ от полной усадки.

$$\frac{l_{\phi} - l_{отл}}{l_{отл}} = \varepsilon_l = \varepsilon_m \pm \varepsilon_{тех},$$

где l_{ϕ} и $l_{отл}$ — соответственно линейные размеры формы и отливки;

ε_l — коэффициент литейной усадки;

$\varepsilon_{тех}$ — технологический коэффициент, характеризующий изменение размеров формы при ее отделке, сушке и расталкивании модели перед ее извлечением из формы.

Очевидно, что при расталкивании модели размеры отливки увеличиваются, поэтому $\varepsilon_{\text{тех}}$ в формуле берется со знаком «-».

Выше мы рассматривали так называемую свободную усадку, т.е. усадку, которая развивается свободно, без каких-либо затруднений. В реальных условиях усадка всегда протекает с определенным затруднением (торможением). Поэтому литейная усадка всегда меньше свободной. При высоких температурах сплавы не подчиняются закону Гука и в отливках под воздействием сил, препятствующих усадке, могут развиваться значительные пластические деформации. В результате этого линейная усадка уменьшается на величину пластических деформаций. Сравним усадку круглого бруска и такого же бруска, снабженного фланцами (рис. 4.1).

Усадка круглого бруска ничем не стеснена, кроме трения о стенки формы. При заливке формы сталью с $\varepsilon_m=2\%$ его длина после охлаждения будет равна 980 мм. Если брусок снабжен фланцами, то они будут препятствовать усадке, так как форма станет оказывать сопротивление сближению фланцев при усадке. В результате литейная усадка будет меньше свободной. Фактическая величина литейной усадки зависит от способности формы к пластической деформации, т.е. от податливости формы. Если

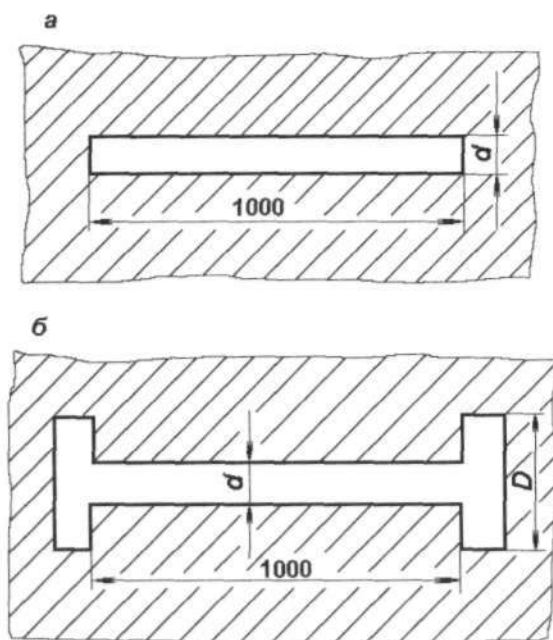


Рис. 4.1. Схема отливок круглого бруска (а) и бруска с фланцами (б)

форма металлическая, то литейная усадка равна нулю. Вследствие расширения формы при ее прогреве может происходить даже увеличение размеров отливки. Однако при этом в отливках могут возникнуть трещины из-за исчерпания резерва пластичности стали. Экспериментальные данные показывают, что отливки из углеродистой стали невозможно получить без трещин, если литейная усадка меньше 1–1,25 % (при свободной усадке 2 %). Следует отметить, что при затруднении уменьшается, главным образом, доперлитная усадка стали.

Кроме механического торможения усадки необходимо рассматривать и ее термическое торможение. Отливка представляет собой связанные в одну конструкцию отдельные элементы, имеющие различную конфигурацию и разные толщины стенок. Поэтому охлаждение различных элементов отливки происходит с разной скоростью, и соответственно с разной скоростью развиваются усадочные процессы. Медленно охлаждающиеся части будут препятствовать усадке более быстро охлаждающихся частей. В результате литейная усадка будет меньше соответствующей свободной усадки.

Вопросы деформации и возникновения напряженного состояния в отливке при ее охлаждении в форме будут рассмотрены в гл. 6.

Глава 3. ОБЪЕМНЫЕ УСАДОЧНЫЕ ДЕФЕКТЫ В ОТЛИВКАХ

Коэффициент относительной объемной усадки в жидком состоянии и при затвердевании больше коэффициента усадки при охлаждении затвердевшей отливки. В результате объем отливки после ее охлаждения, определенный по наружным размерам, будет больше объема содержащегося в ней металла. Разница между этими объемами определяет суммарный объем заполненных газами пустот в отливке, представляющих собой объемные усадочные дефекты.

В зависимости от характера затвердевания сплава эти дефекты могут проявляться в виде концентрированных усадочных раковин и усадочных пор. Концентрированные усадочные раковины образуются при преимущественно последовательном затвердевании и представляют собой локализованные в отдельных объемах отливки относительно крупные несплошности сплава. Усадочные поры – это относительно мелкие, часто микроскопические несплошности, рассредоточенные по отдельным участкам, а иногда и по всему объему отливки. Они образуются при преимущественно объемном затвердевании сплава.

3.1. Формирование усадочных раковин

Рассмотрим закономерности образования концентрированной усадочной раковины. На рис. 4.2 изображена открытая сверху форма, залитая сплавом при температуре $T_{зал}$. Будем считать, что охлаждение сплава с его верхней поверхности не происходит. Кроме того, примем, что сплав в форму заливается мгновенно и его температура в начале процесса по всему объему полости формы одинакова и равна $T_{зал}$. Анализ проведем для сплава, затвердевающего при фиксированной температуре $T_{кр}$. Схема развития усадочных процессов показана на рис. 4.2. На рис. 4.3 приведены кривые распределения температур по сечению отливки на разных этапах ее охлаждения. После заливки сплава температура по сечению отливки распределена равномерно (рис. 4.3, а), объем сплава по наружным габаритам $V_{отл}^a = V_0$, объем металла в отливке $V_m^a = V_0$. Усадочная раковина имеет объем $V_p^a = V_{отл}^a - V_m^a = 0$, т.е. она отсутствует. В процессе охлаждения температура сплава убывает и к этапу б достигает на поверхности отливки значения $T_{кр}$ (рис. 4.3, б). На поверхности отливки образуется тонкая твердая корка. Расплав в полости формы опустился под действием силы тяжести вследствие объемной усадки в жидком состоянии. При этом сверху об-

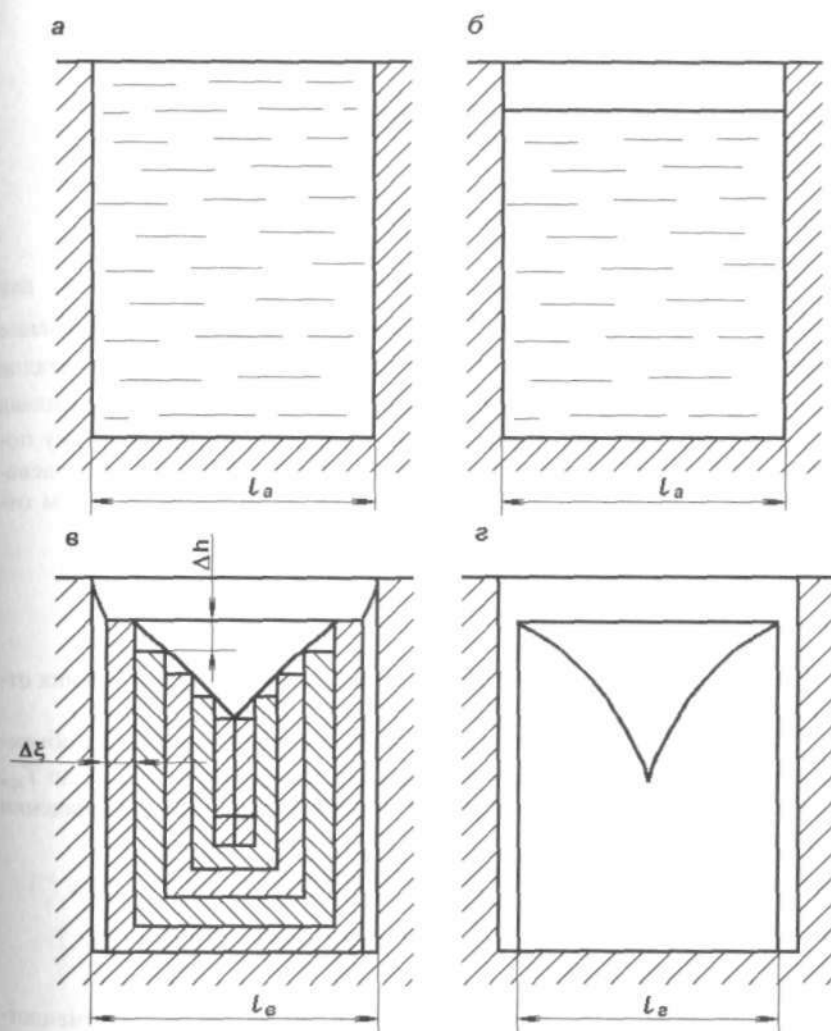


Рис. 4.2. Схема формирования усадочной раковины:
 а – жидкий сплав при температуре заливки; б – усадка в жидком состоянии;
 в – формирование усадочной раковины; г – форма усадочной раковины
 в затвердевшей отливке

разовалась пустота, т.е. внешняя усадочная раковина. Объем отливки по наружным габаритам в этот момент равен

$$V_{отл}^6 = V_0(1 - \alpha_{Vж}(T_{зал} - T_{ж.с})),$$

где $T_{ж.с}$ — некоторое среднее значение температуры жидкого сплава.
Объем металла в отливке равен

$$V_m^6 = V_0(1 - \alpha_{Vж}(T_{зал} - T_{ж.с})).$$

Объем усадочной раковины в этот момент равен нулю, так как $V_p^6 = V_{отл}^6 - V_m^6 = 0$. С данного этого момента начинается формирование усадочной раковины (рис. 4.2, б). При нарастании слоя твердого металла на величину $\Delta\xi$ вследствие усадки происходит понижение уровня сплава на величину Δh . Процессы нарастания корки и соответствующего ему понижения уровня сплава продолжают непрерывно, и к концу затвердевания отливки формируется усадочная раковина. В этот момент объем отливки по наружным размерам равен

$$V_{отл}^s = V_{отл}^6(1 - \alpha_{Vm}(T_{кр} - T_{т.с})),$$

где $T_{т.с}$ — средняя температура твердого металла в конце затвердевания отливки.

Жидкий металл при переходе от этапа б к этапу в претерпел объемную усадку в жидком состоянии при падении температуры от $T_{ж.с}$ до $T_{кр}$, объемную усадку при затвердевании и в твердом состоянии при падении температуры от $T_{кр}$ до $T_{т.с}$.

Усадка в жидком состоянии и при затвердевании равна

$$\Delta V = V_{отл}^6(\alpha_{Vж}(T_{ж.с} - T_{кр}) + \varepsilon_{Vз}).$$

Объем твердого металла при переходе от этапа б к этапу в изменяется от нуля до V_m^s . Усредненно определим усадку в твердом состоянии по формуле $0,5V_{отл}^6 \cdot \alpha_{Vm}(T_{кр} - T_{т.с})$. Таким образом, объем плотного металла в отливке равен

$$V_m^s = V_{отл}^6(1 - \alpha_{Vж}(T_{ж.с} - T_{кр}) - \varepsilon_{Vз} - 0,5\alpha_{Vm}(T_{кр} - T_{т.с})).$$

Абсолютный объем усадочной раковины найдем по формуле

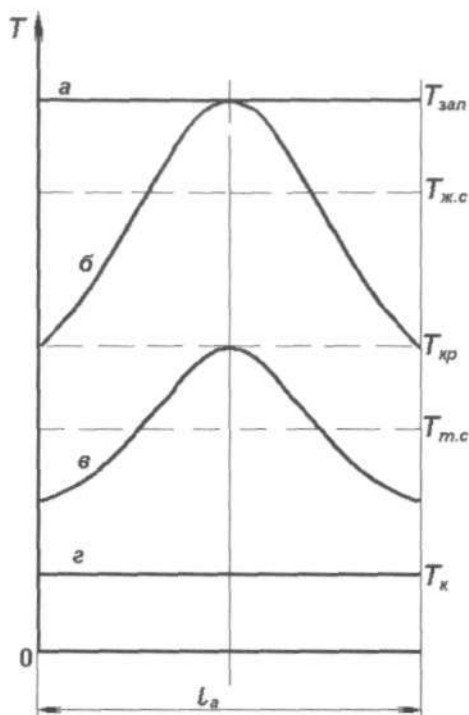


Рис. 4.3. Распределение температур по сечению отливки, соответствующее этапам затвердевания а, б, в, г на рис. 4.2

$$V_p^a = V_{отл}^a - V_m^a = V_{отл}^b (1 - \alpha_{Vm} (T_{кр} - T_{м.с}) - 1 + \alpha_{Vж} (T_{ж.с} - T_{кр}) + \varepsilon_{Vз} + 0,5\alpha_{Vm} (T_{кр} - T_{м.с})) = V_{отл}^b (\alpha_{Vж} (T_{ж.с} - T_{кр}) + \varepsilon_{Vз} - 0,5\alpha_{Vm} (T_{кр} - T_{м.с})).$$

Относительный объем усадочной раковины будет равен

$$V_p^{отл} = \frac{V_p^a}{V_{отл}^a} = \frac{\alpha_{Vж} (T_{ж.с} - T_{кр}) + \varepsilon_{Vз} - 0,5\alpha_{Vm} (T_{кр} - T_{м.с})}{1 - \alpha_{Vm} (T_{кр} - T_{м.с})} \approx \alpha_{Vж} (T_{ж.с} - T_{кр}) - 0,5\alpha_{Vm} (T_{кр} - T_{м.с}) + \varepsilon_{Vз}$$

при $\alpha_{Vm} (T_{кр} - T_{м.с}) \ll 1$.

Так как $\alpha_{Vm} = 3\alpha_m$, то

$$V_p^{отн} = \alpha_{V_{ж}}(T_{ж.с} - T_{кр}) + \varepsilon_{V_3} - 1,5\alpha_m(T_{кр} - T_{м.с}).$$

После полного охлаждения отливки до $T=T_k$ (этап 2) ее объем по наружным габаритам равен $V_{отл}^2 = V_{отл}^6 (1 - \alpha_{V_m}(T_{м.с} - T_k))$, а объем плотного металла в отливке составляет $V_m^2 = V_m^6 (1 - \alpha_{V_m}(T_{м.с} - T_k))$.

Объем усадочной раковины равен

$$V_p^2 = V_{отл}^2 - V_m^2 = (V_{отл}^6 - V_m^6)(1 - \alpha_{V_m}(T_{м.с} - T_k)) = V_p^6 (1 - \alpha_{V_m}(T_{м.с}^* - T_k)).$$

Относительный объем раковины найдем по формуле

$$V_p^{отн} = \frac{V_p^2}{V_{отл}^2} = \frac{V_p^6 (1 - \alpha_{V_m}(T_{м.с} - T_k))}{V_{отл}^6 (1 - \alpha_{V_m}(T_{м.с} - T_k))} = \frac{V_p^6}{V_{отл}^6},$$

т.е. относительный объем раковины при охлаждении затвердевшей отливки не изменяется. Абсолютный же объем раковины V_p^2 при этом уменьшается, так как вследствие усадки в твердом состоянии все размеры отливки, а значит, и размеры раковины уменьшаются.

Для расчета относительного объема усадочной раковины применяют формулу, впервые полученную Ю.А. Нехендзи и Н.Г. Гиршовичем:

$$V_p^{отн} = \frac{V_p}{V_{отл}} = \alpha_{V_{ж}}(T_{ж.с} - T_{кр}) + \varepsilon_{V_3} - 1,5\alpha_m(T_{кр} - T_{м.с}).$$

Рассмотрим влияние технологических факторов на величину $V_p^{отн}$.

Как видно из полученной выше формулы, относительный объем усадочной раковины при прочих равных условиях тем больше, чем больше коэффициент объемной усадки в жидком состоянии и относительная объемная усадка при затвердевании сплава. В связи с этим при повышении содержания углерода объем усадочной раковины в стальных отливках увеличивается, поскольку возрастает как $\alpha_{V_{ж}}$, так и ε_{V_3} . При одинаковых значениях $\alpha_{V_{ж}}$ и ε_{V_3} объем усадочной раковины зависит от перегрева сплава в момент начала затвердевания отливки ($T_{ж.с} - T_{кр}$).

Очевидно, что $(T_{ж.с} - T_{кр})$ будет тем больше, чем выше температура заливки (при $T_{зал} = T_{кр}$, $T_{ж.с} - T_{кр} = 0$), меньше теплопроводность сплава и выше теплоаккумулирующая способность материала формы. Поэтому с повыше-

нием температуры заливки объем усадочной раковины при прочих равных условиях увеличивается.

Так как легирующие компоненты понижают теплопроводность стали, отливки из легированной стали имеют больший объем усадочных раковин, чем отливки из углеродистой стали. Особенно большой объем усадочных раковин (до 6 %) в отливках из высокомарганцевистой стали 110Г13Л. В отливках из углеродистой стали объем усадочных раковин составляет 3,0–3,5 %. Так как с увеличением теплоаккумулирующей способности формы возрастает перепад температуры по сечению отливки, т.е. при заданной температуре заливки увеличивается разность $(T_{ж.с} - T_{кр})$ величина $\alpha_{V_{жс}} (T_{ж.с} - T_{кр}) + \epsilon_{V_3}$ при кокильном литье больше, чем при литье в песчаные формы. Однако объем усадочной раковины при этом может не изменяться, поскольку одновременно с увеличением $(T_{ж.с} - T_{кр})$ повышается и $(T_{м.с} - T_{кр})$, т.е. усадка отливки по наружным габаритам. С увеличением приведенной толщины стенки отливки возрастает перепад температур $(T_{ж.с} - T_{кр})$ и увеличивается не только абсолютный, но и относительный объем усадочной раковины.

Для уменьшения объема усадочных раковин в чугуновых отливках необходимо в максимальной степени использовать возможность увеличения объема чугуна за счет графитизации в период его затвердевания. Процесс графитизации преимущественно должен протекать в жидком состоянии при жесткой литейной форме.

При затвердевании серого чугуна с пластинчатым графитом графитизация почти компенсирует усадку в жидком состоянии и при затвердевании, что практически исключает образование концентрированных усадочных раковин в относительно тонкостенных отливках.

Объем усадочных раковин при литье белого (ковкого) чугуна может быть определен по выведенной выше формуле.

Усадка в твердом состоянии будет уменьшать усадочную раковину тем в большей степени, чем выше коэффициент усадки ϵ_{V_m} и чем ниже средняя температура твердого металла к концу затвердевания отливки $T_{м.с}$. Именно это является одной из причин большей склонности к образованию усадочных раковин чугуна с шаровидным графитом по сравнению с чугуном с пластинчатым графитом. Графитизация в твердом состоянии чугуна с шаровидным графитом приводит не к усадке, а к расширению отливки в доперлитной области, что при достаточной податливости песчаной формы ведет к увеличению объема усадочной раковины.

В заключение рассмотрим влияние на объем усадочных дефектов продолжительности заливки формы сплавом. Приведенный выше вывод расчетной формулы справедлив при мгновенной заливке. При увеличении продолжительности заливки повышается доля сплава, затвердевшего в

процессе заливки. Усадка этого сплава автоматически компенсируется поступающим из ковша в форму жидким сплавом. Поэтому с увеличением продолжительности заливки объем усадочной раковины уменьшается. Если форму заливать достаточно медленно, то усадочная раковина не образуется, так как усадка будет полностью компенсирована сплавом, поступающим из ковша. Это имеет место, если продолжительность заливки равна продолжительности затвердевания отливки.

3.2. Влияние технологических факторов на конфигурацию и положение усадочной раковины в отливке

Рассмотрим факторы, определяющие конфигурацию и положение усадочной раковины в отливке. Для иллюстрации найдем уравнение контура усадочной раковины цилиндрической высокой отливки ($H_0 \gg R$) при условии, что кинетика затвердевания описывается законом квадратного корня $\xi = m\sqrt{t}$, а суммарная относительная усадка равна ε_V (рис. 4.4).

Пусть в момент времени t толщина затвердевшей корки равна ξ , а сплав в отливке находится на высоте y .

За время dt затвердевает слой $d\xi = \frac{m \cdot dt}{2\sqrt{t}}$, объем которого равен

$$dV = 2\pi y(R - \xi) \cdot d\xi = 2\pi y(R - m\sqrt{t}) \frac{m}{2\sqrt{t}} \cdot dt.$$

Объем жидкого сплава внутри цилиндра уменьшится на величину $2\pi y(R - m\sqrt{t}) \cdot m \cdot \frac{\varepsilon_V \cdot dt}{2\sqrt{t}}$, что вызовет понижение уровня сплава на величину dy . Уравнение материального баланса имеет вид

$$-2\pi y \cdot \varepsilon_V (R - m\sqrt{t}) \cdot \frac{m \cdot dt}{2\sqrt{t}} = \pi (R - m\sqrt{t})^2 \cdot dy;$$

$$\frac{m}{\sqrt{t}} \cdot y \varepsilon_V \cdot dt = -(R - m\sqrt{t}) \cdot dy; \quad \frac{dy}{y} = -\frac{m \cdot \varepsilon_V \cdot dt}{\sqrt{t} \cdot (R - m\sqrt{t})};$$

$$\ln y = -\int \frac{m \cdot \varepsilon_V \cdot dt}{\sqrt{t}(R - m\sqrt{t})} + \ln C; \quad z = R - m\sqrt{t}; \quad dz = -\frac{m \cdot dt}{2\sqrt{t}};$$

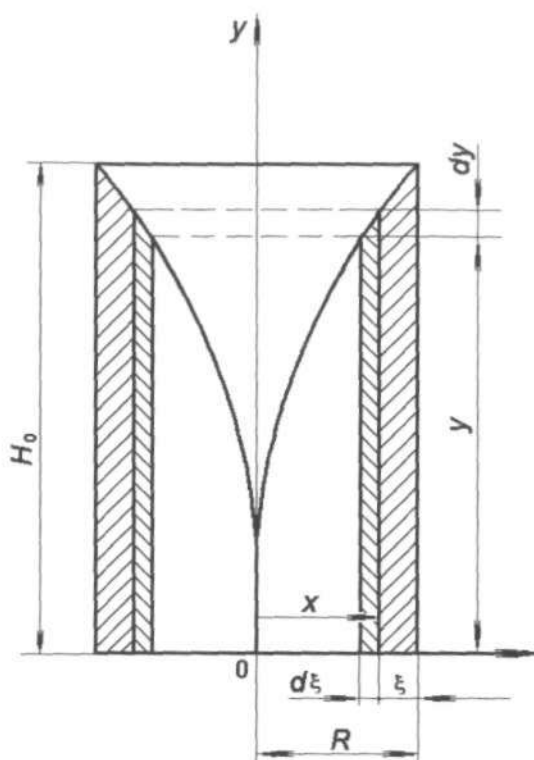


Рис. 4.4. Расчетная схема к выводу уравнения контура усадочной раковины

$$\ln y = 2 \int \frac{\varepsilon_v \cdot dz}{z} + \ln C.$$

При $t=0$ $y=H_0$ и $z=R$.

$$\ln y = 2\varepsilon_v \cdot \ln z + \ln C; \quad \ln C = \ln H_0 - 2\varepsilon_v \cdot \ln R;$$

$$\ln y = 2\varepsilon_v (\ln(R - m\sqrt{t}) - \ln R) + \ln H_0;$$

$$\ln\left(\frac{y}{H_0}\right) = \ln\left(\frac{R - m\sqrt{t}}{R}\right)^{2\varepsilon_v} \quad \text{и} \quad \frac{y}{H_0} = \left(\frac{R - m\sqrt{t}}{R}\right)^{2\varepsilon_v}.$$

В конце затвердевания при $t = \frac{R^2}{m^2}$ $y=0$, т.е. усадочная раковина до-

ходит до нижнего основания отливки. Текущая координата $x=R-m\sqrt{t}$.
С учетом этого уравнение контура раковины имеет вид

$$\frac{y}{H_0} = \left(\frac{x}{R}\right)^{2\varepsilon_{\text{гр}}}. \quad (4.1)$$

В осевой зоне тонкостенных отливок усадочная раковина представляет собой узкий осевой канал, через который фильтрация жидкого сплава затруднена. Поэтому под усадочной раковиной вдоль оси отливки всегда имеет место усадочная пористость. Для уменьшения глубины проникновения раковины необходимо, чтобы угол α между вертикалью и поверхностью охлаждения был как можно больше. Для определения положения усадочной раковины применяют метод построения изосолд, т.е. линий, соответствующих положению фронта затвердевания в данный момент времени. На рис. 4.5 видно, что увеличение угла α приводит к перемещению усадочной раковины вверх. В случае обратной конусности отливки ($\alpha > \pi/2$) в ее нижнем сечении образуется усадочная раковина (рис. 4.5, в). В общем случае усадочные раковины будут образовываться во всех изолированных, затвердевающих в последнюю очередь узлах отливки, которые обычно называют «теплыми» или «горячими» узлами. Их можно установить, строя изосолды (рис. 4.6).

подавляющее большинство отливок отличается наличием закруглений, переходов и сочленений различного сечения. В этих местах могут создаваться скопления металла, образующие термические узлы, затвердевающие медленнее, чем соседние элементы отливки. В подобных узлах возникают усадочные раковины. Для выявления возможности образования

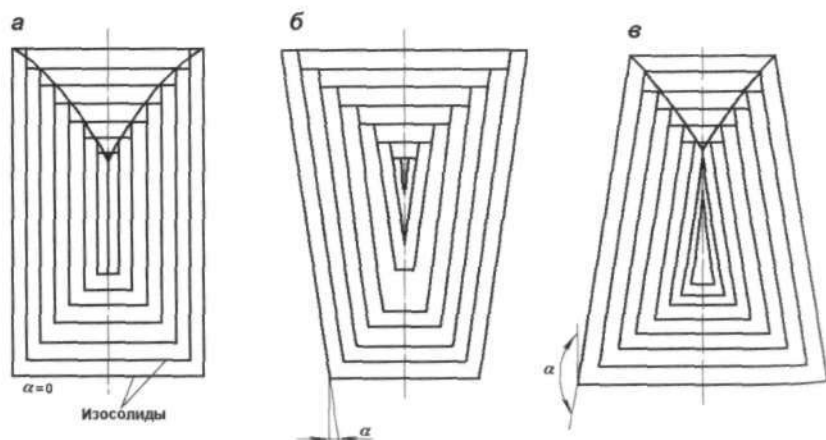


Рис. 4.5. Влияние угла наклона поверхности охлаждения отливки α на положение усадочной раковины

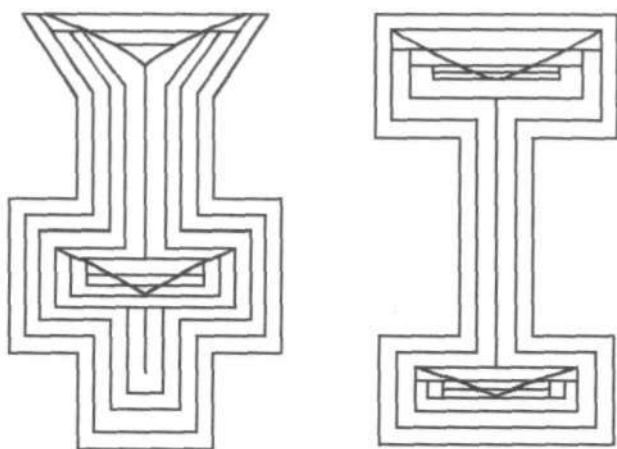


Рис. 4.6. Образование усадочных раковин в «теплых» узлах отливки

усадочных раковин можно рекомендовать метод «вписанных окружностей». Если окружность, вписанную в термический узел, можно «выкатить» вверх через стенку отливки, то в нем усадочная раковина не образуется (рис. 4.7, а). В противоположном случае в узле образуется усадочная раковина (рис. 4.7, б).

Общий принцип, которому должны удовлетворять конфигурация отливки и условия ее затвердевания, чтобы при установке сверху питающих

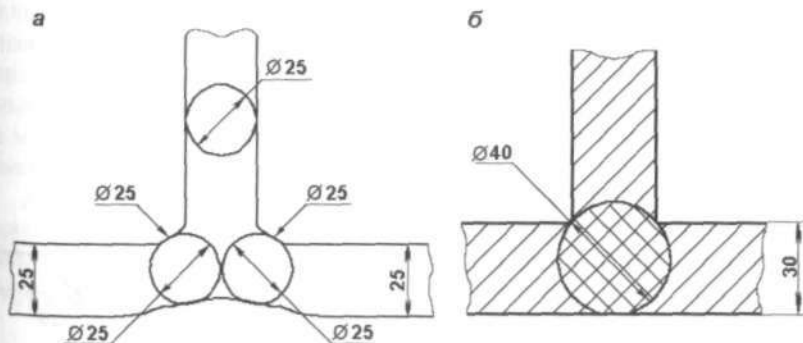


Рис. 4.7. Применение метода «вписанных окружностей» для выявления возможности образования усадочной раковины:

а – усадочная раковина не образуется; б – усадочная раковина образуется

прибылей в отливке отсутствовали усадочные раковины, был сформулирован В.Е. Грум-Гржимайло и носит название *принципа направленного затвердевания*. Он состоит в выполнении двух требований:

1) каждое вышележащее сечение отливки должно затвердевать позднее нижележащего;

2) сплав в прибыли должен затвердевать в последнюю очередь.

Если с нижнего сечения отливки направить вверх вертикальную ось x , то продолжительность затвердевания элементов отливки вдоль этой оси

должна увеличиваться, т.е. $\frac{d\tau_{затв}}{dx} > 0$. Чем больше эта производная, тем

больше направленность затвердевания и тем выше и более компактно располагается усадочная раковина. Для обеспечения направленного затвердевания необходимо уже на стадии конструирования отливки обеспечить непрерывное увеличение приведенной толщины стенки отливки в направлении снизу вверх к месту установки прибыли. Если это требование выполнить невозможно из конструкторских соображений, то необходимо ускорить затвердевание всех изолированных термических узлов отливки, отделенных от места установки прибыли более тонкостенными элементами, с помощью установки наружных и внутренних холодильников. Наружные холодильники представляют собой металлические вставки, оформляющие поверхности соответствующих элементов отливки (рис. 4.8). Чаще всего наружные холодильники выполняют из чугуна.

Внутренние холодильники представляют собой вставки (чаще всего в виде спиралей) из отливаемого сплава, устанавливаемые в полость формы, оформляющей термические узлы отливки (рис. 4.9).

Можно строго рассчитать массу устанавливаемых холодильников и

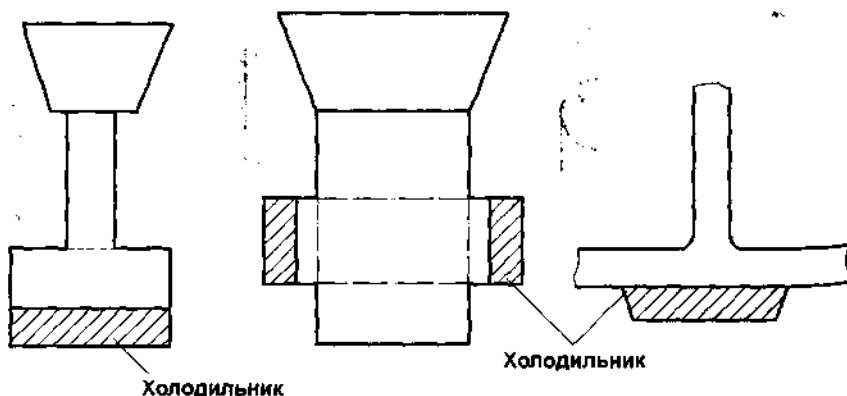


Рис. 4.8. Примеры установки наружных холодильников

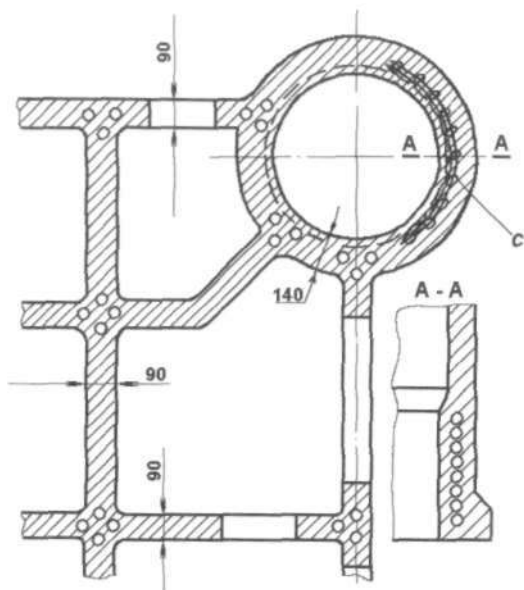


Рис. 4.9. Часть крупной отливки с внутренними спиральными холодильниками (С – спирали диаметром 60 мм из проволоки диаметром 6 мм с двумя-тремя прутками диаметром 10–12 мм)

толщину наружных холодильников, выполнив на ЭВМ численный расчет продолжительности затвердевания термического узла и соседнего, более близкого к прибыли, узла отливки. Задача сводится к уменьшению продолжительности затвердевания термического узла в сравнении с продолжительностью затвердевания соседнего верхнего элемента отливки. Обычно толщину наружных холодильников выбирают по соответствующим таблицам в зависимости от типа схемы (рис. 4.10) и параметров соседних с данным термическим узлом элементов отливки. Подробно технологические методы подбора и установки наружных и внутренних холодильников рассмотрены в курсе «Технология стального литья».

Для иллюстрации приведем упрощенный метод расчета массы внутренних холодильников для схемы, изображенной на рис. 4.11. Исходя из закона квадратного корня, определим продолжительность затвердевания вышерасположенного элемента:

$$t_3 = \frac{R_2^2}{m_3^2},$$

где R_2 – приведенная толщина стенки элемента;

m_3 – коэффициент затвердевания элемента,

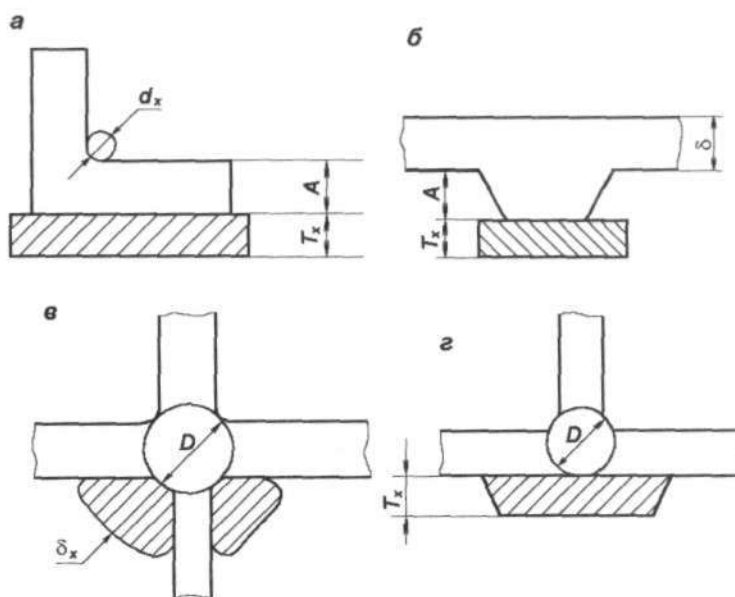


Рис. 4.10. Схемы установки наружных холодильников



Рис. 4.11. Схема для расчета массы внутреннего холодильника

$$m_3 = \frac{2b_\phi \cdot b_m (T_{кр} - T_0)}{(b_\phi + b_m) \cdot \sqrt{\pi} (L\rho + C_{ж} \cdot \rho_{ж} (T_{зл} - T_{кр}))}.$$

В термическом узле с холодильником теплота при затвердевании отливки отводится в форму и частично расходуется на нагрев холодильника. Массу холодильника нужно определить так, чтобы не происходило его расплавления, т.е. максимальная температура нагрева холодильника должна быть равна $T_{сол}$. Уравнение теплового баланса для термического узла с некоторым приближением можно записать следующим образом:

$$\frac{b_\phi \cdot b_m (T_{кр} - T_0) \cdot S}{(b_\phi + b_m) \cdot \sqrt{\pi} l} \cdot dt + C_x m_x \cdot dT_x = L\rho \cdot dV_{мз} + C_{ж} \rho_{ж} \cdot dT_{ж} \cdot V_{ж},$$

где C_x и m_x – удельная теплоемкость и масса холодильника;

$V_{мз}$ – масса затвердевшего сплава;

T_x и $T_{ж}$ – температур а холодильника и жидкого сплава.

После интегрирования имеем

$$\frac{2b_\phi \cdot b_m (T_{кр} - T_0) \cdot S}{(b_\phi + b_m) \cdot \sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{t} + C_x m_x (T_c - T_0) = L\rho \cdot V_{м.у} + C_{ж} \rho_{ж} (T_{зл} - T_{кр}) \cdot V_{ж}.$$

Приняв $m_{м.у} = \rho V_{м.у} = \rho_{ж} V_{ж}$, после преобразований получим

$$\frac{m_x}{m_{м.у}} = \frac{L + C_{ж} (T_{зл} - T_{кр}) \cdot S}{C_x (T_c - T_0)} - \frac{2b_\phi b_m \cdot \sqrt{t}}{(b_\phi + b_m) \cdot \sqrt{\pi} \cdot C_x \rho \cdot R_{м.у}}.$$

Примем $t = \frac{R_3^2}{m_3^2}$, т.е. с учетом значения m_3 имеем

$$\sqrt{t} = \frac{R_3 (b_m + b_\phi) \cdot \sqrt{\pi} (L\rho + C_{ж} \rho_{ж} (T_{зл} - T_{кр}))}{2b_\phi b_m (T_{кр} - T_0)}.$$

С учетом этого

$$\frac{m_x}{m_{м.у}} = \frac{L + C_{ж} (T_{зл} - T_{кр})}{C_x (T_c - T_0)} - \frac{[L\rho + C_{ж} \rho_{ж} (T_{зл} - T_{кр})] \cdot R_3}{(T_c - T_0) \cdot C_x \rho \cdot R_{м.у}}.$$

Приняв $\rho \approx \rho_{ж}$, имеем

$$\frac{m_x}{m_{m,y}} = \frac{L + C_{ж}(T_{зал} - T_{кр})}{C_x(T_c - T_0)} \left(1 - \frac{R_s}{R_{m,y}}\right). \quad (4.2)$$

Выполним расчет для углеродистой стали при $\delta_s=4$ см, $\delta_{m,y}=12$ см, $h_{m,y}=12$ см, $L=258$ Дж/г, $C_{ж}=0,92$ Дж/(г·К), $C_x=0,75$ Дж/(г·К), $T_{зал}=1597$ °С, $T_c=1447$ °С, $T_{кр}=1472$ °С:

$$\begin{aligned} \frac{m_x}{m_{m,y}} &= \frac{258 + 0,92 \cdot 125}{1427 \cdot 0,75} \left(1 - \frac{R_s}{R_{m,y}}\right) = 0,37 \left(1 - \frac{R_s}{R_{m,y}}\right); \\ R_s &= \frac{\delta_s}{2} = 2 \text{ см}; \quad R_{m,y} = \frac{\delta_{m,y} \cdot h_{m,y}}{2(\delta_{m,y} + h_{m,y})} = \frac{12 \cdot 12}{2 \cdot 24} = 3 \text{ см}; \\ \frac{m_x}{m_{m,y}} &= 0,37 \left(1 - \frac{2}{3}\right) \approx 0,12. \end{aligned}$$

Обычно масса холодильника не превышает 10–15 % от массы захлаживаемого узла отливки. В случае применения спиральных холодильников при стальном литье рекомендуют выбирать их массу в пределах 3–4 % от массы питаемого узла. При большей массе холодильники начинают резко ухудшать механические свойства стали в захлаживаемом узле. Поэтому если необходимая с точки зрения тепловых условий масса холодильников больше 3–4 %, то их применение следует комбинировать с использованием наружных холодильников.

На направленность затвердевания существенное влияние оказывают место подвода сплава в форму, температура заливки сплава и скорость заливки. В конечном счете они определяют знак и величину температурного градиента dT/dx по высоте отливки. Для усиления направленности затвердевания необходимо, чтобы имел место положительный температурный градиент по высоте отливки ($dT/dx > 0$). Этому способствует подвод сплава сверху, чаще всего под прибыль. Возрастание продолжительности заливки при подводе сверху увеличивает градиент температур, так как при этом температура в верхних частях отливки и в прибыли повышается. Однако подвод сверху для высоких отливок ($H_{отл} > 300$ мм) и отливок, изготавливаемых из склонных к окислению и вспениванию сплавов (алюминиевые и магниевые сплавы, высоколегированные стали), применять нельзя из-за возможного разрушения формы, окисления сплава, образования газовой пористости и окисных плен в отливках.

При подводе снизу формируется отрицательный температурный градиент по высоте отливки, что не способствует направленности затвердева-

ния. При увеличении продолжительности заливки в этом случае охлаждение сплава в форме возрастает по мере его подъема, что приводит к ухудшению условий питания отливки из прибыли. При подводе снизу происходит разогрев нижних сечений отливки в процессе заливки формы, особенно в зоне действия питателей. В результате этого около питателей образуются локализованные термические узлы, объемная усадка которых не может быть компенсирована перетоком металла из соседних областей отливки, затвердевающих раньше. Поэтому в зонах около питателей могут возникать пористость или концентрированные усадочные раковины. Для их устранения следует применять рассредоточенный подвод сплава через несколько питателей, размещенных по периметру отливки. В этом случае количество металла, проходящего через каждый питатель, уменьшается, что снижает перегрев прилегающих к нему областей отливки.

Если отливка толстостенная, то вследствие свободной конвекции после заливки формы происходит выравнивание температур по высоте отливки, что уменьшает отрицательное влияние подвода снизу на направленность затвердевания. Действительно, находящийся после заливки в нижней части полости формы жидкий сплав имеет меньшую плотность, чем в верхней части формы. В результате возникает конвективный поток, стремящийся выровнять температуры в объеме отливки. Однако в относительно тонких отливках для большинства машиностроительных деталей вследствие быстрого увеличения вязкости охлаждающегося сплава действие конвекции не проявляется и его можно не учитывать.

Для высоких отливок и отливок из сплавов, склонных к окислению, применяют подвод сплава на нескольких уровнях и через вертикально-щелевые литниковые системы (рис. 4.12). В этих случаях металл подается из стояка через соответствующий питатель или щель непосредственно на зеркало поднимающегося в форме сплава, что обеспечивает положительный температурный градиент в отливке. Методы расчета и конструирования таких литниковых систем рассматриваются в курсе «Технология литейного производства».

Очень часто в отливках образуются открытые усадочные дефекты, называемые утяжинами. Они возникают не только на верхних, но и на боковых поверхностях отливки. Рассмотрим механизм образования этих дефектов. Они появляются в тех местах отливки, где по тем или иным причинам скорость нарастания затвердевшей корки замедлена по сравнению с другими участками отливки. Рассмотрим отливку, содержащую внутренний угол (рис. 4.13).

Участок формы, образующий внутренний угол отливки, прогревается более интенсивно (тепло поступает в него через две поверхности), чем остальные поверхности. Поэтому рост твердой корки около него замедлен.

Пусть объем полости формы равен исходному объему жидкого сплава V_0 , плотность жидкого и твердого сплава соответственно $\rho_{ж}$ и $\rho_{тв}$, ис-

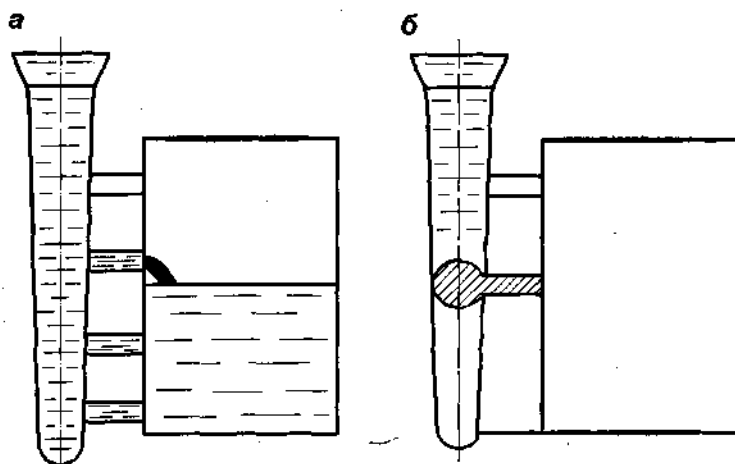


Рис. 4.12. Подвод сплава к отливке:

а – на нескольких уровнях; б – вертикально-щелевой литниковой системой

исходная масса жидкого сплава $M = V_0 \cdot \rho_{ж0}$. К моменту времени t в отливке выделится доля твердой фазы $\psi = \frac{m_{мс}}{M}$. Объем твердой фазы равен

$V_{мс} = \frac{m_{мс}}{\rho_{мс}} = M \frac{\psi}{\rho_{мс}}$. Фактический объем жидкого сплава в этот момент равен $V_{жс} = V_0 - V_{мс} = \frac{M}{\rho_{ж0}} - \frac{M\psi}{\rho_{мс}}$. Плотность жидкого сплава будет равна

$$\begin{aligned} \rho_{жс} &= \frac{M_{жс}}{V_{жс}} = \frac{M - m_{мс}}{V_{жс}} = \frac{1 - \psi}{\frac{1}{\rho_{ж0}} - \frac{\psi}{\rho_{мс}}} = \frac{(1 - \psi) \cdot \rho_{мс} \rho_{ж0}}{\rho_{мс} - \rho_{ж0} \cdot \psi} = \\ &= \frac{(1 - \psi) \cdot \rho_{ж0}}{\frac{\rho_{мс} - \rho_{ж0}}{\rho_{мс}} + \frac{\rho_{ж0}(1 - \psi)}{\rho_{мс}}} = \frac{(1 - \psi) \cdot \rho_{ж0}}{\varepsilon_V + \frac{\rho_{ж0}(1 - \psi)}{\rho_{мс}}} = \frac{\rho_{ж0}}{\frac{\varepsilon_V}{1 - \psi} + \frac{\rho_{ж0}}{\rho_{мс}}}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

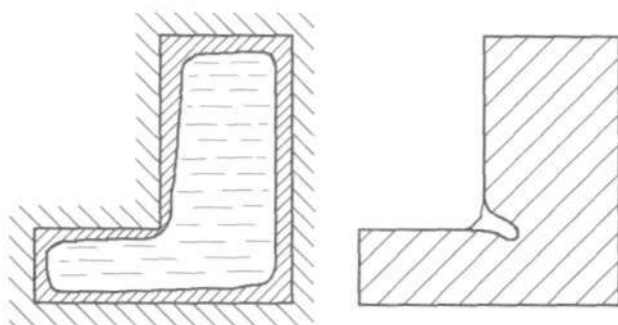


Рис. 4.13. Схема образования утяжины в отливке, имеющей внутренний угол

Из этой формулы видно, что с ростом доли затвердевшего сплава ψ плотность жидкого сплава внутри отливки уменьшается. Известно, что жидкость малосжимаема. Поэтому, в отличие от газов, малейшие изменения плотности приводят к резким изменениям давления жидкости. В процессе затвердевания жидкость испытывает деформацию всестороннего растяжения, так как вследствие усадки ее удельный объем увеличивается. Снижение плотности жидкости (даже очень малое) приводит к резкому падению давления жидкости внутри отливки $P_{ж}$. В результате на затвердевшую корку сплава действует направленный внутрь перепад давлений $\Delta P = P_a - P_{ж}$.

Если затвердевшая корка достаточно толстая, то ее деформация незначительна. В этом случае падение давления жидкости рано или поздно приведет к разрыву сплошности жидкого сплава (при достижении предела прочности жидкости на разрыв) и образованию усадочной раковины. Разрыв сплошности жидкого сплава облегчается наличием в нем растворенных газов. Можно принять, что образование усадочной раковины произойдет в момент, когда давление в жидкости будет ниже значения, при котором количество растворенных в сплаве газов превысит их растворимость,

т.е. при $P_{ж} < \frac{[G]}{K_p^2}$, где $[G]$ — содержание газа, например водорода, в жид-

ком сплаве, $\text{см}^3/100 \text{ г}$ сплава; K_p — коэффициент в законе Сивертса.

В тех местах, где корка тонкая, например в области внутреннего угла (см. рис. 4.13), перепад давлений вдавливают корку внутрь, в результате чего образуется утяжина. Очень часто при этом корка прорывается и в отливке возникает усадочная раковина.

3.3. Усадочная пористость в отливках

Суммарная объемная усадка проявляется не только в виде усадочных раковин, но и в виде усадочной пористости. Выше было показано, что даже при чисто последовательном затвердевании в осевых зонах отливки возникает усадочная пористость. В отливках всегда имеет место пористость, более или менее неравномерно распределенная по объему отливки. Общий объем усадочных дефектов складывается из объема концентрированных раковин и суммарного объема рассредоточенной по отливке пористости, т.е. $V_{y,d} = V_{y,p} + V_{пор}$. В отливках, затвердевших преимущественно последовательно, преобладают усадочные раковины. При преимущественно объемном затвердевании основным видом усадочных дефектов является усадочная пористость. Связь характера усадочных дефектов с диаграммой состояния сплава показана на рис. 4.14.

Минимальный суммарный объем усадочных дефектов, как правило, имеют сплавы эвтектического состава. С увеличением ширины интервала затвердевания, т.е. ширины жидко-твердой зоны в отливке и доли объемного затвердевания, возрастает доля усадочных дефектов в виде усадочных пор и уменьшается доля дефектов в виде усадочных раковин. В сплавах эвтектического состава, углеродистых сталях и чистых металлах усадочные дефекты проявляются главным образом в виде усадочных раковин. При литье объемно затвердевающих алюминиевых и магниевых сплавов объем концентрированных раковин очень мал и основным видом дефектов является усадочная пористость.

Рассмотрим механизм образования усадочной пористости, предложенный М. Флемингом. В условиях объемной кристаллизации в изолированных объемах жидкого сплава между кристаллитами или в междендритных областях происходит уменьшение плотности сплава и снижение его давления аналогично рассмотренному выше случаю для сплава внутри затвердевающей отливки. Если эти объемы изолированы, т.е. не связаны с соседними, то процессы компенсации усадки за счет переноса жидкого сплава отсутствуют. В этом случае образуются поры за счет разрыва сплошности жидкого сплава.

Если же в жидко-твердой зоне имеются междендритные или межзеренные капилляры, то под действием перепада давлений происходит фильтрационный перенос жидкости через капилляры из избытка или из областей отливки, имеющих запас жидкого сплава. Процесс компенсации усадки за счет направленного массопереноса жидкого сплава называется *питанием отливки*, а объем жидкого сплава, необходимый для компенсации усадки – *дефицитом питания*. Питание отливки за счет фильтрации жидкости через междендритные и межзеренные капилляры называется *фильтрационным питанием*. Перепад давлений при фильтрационном пи-

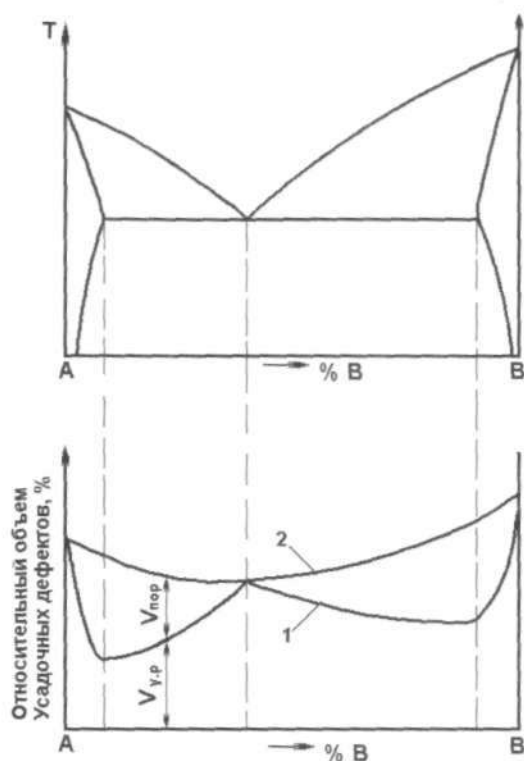


Рис. 4.14. Зависимость относительного объема усадочных дефектов от состава сплава:

- 1 – кривая изменения объема усадочных раковин;
- 2 – кривая суммарного объема усадочных дефектов

тании создается за счет действия внешнего, гидростатического и отрицательного (меньше атмосферного) давления в объемах жидкости при ее кристаллизации. Процесс уменьшения давления жидкости при ее кристаллизации описан выше. Капиллярные силы, если не произошло разрыва сплошности жидкости, при наличии запаса жидкого сплава в прибыли отсутствуют.

Для описания гидродинамики фильтрации обычно используют закон Дарси

$$\vec{v} = -\frac{k}{\eta} \cdot \overrightarrow{\text{grad}P}, \quad (4.4)$$

где $\vec{v}$ – вектор скорости фильтрации, отнесенной ко всему поперечному сечению пористой среды;

η – динамический коэффициент вязкости сплава;

k – коэффициент проницаемости среды, м^2 ;

$\overrightarrow{\text{grad}P}$ – градиент давления.

Для одномерной фильтрации уравнение Дарси имеет вид

$$v = -\frac{k}{\eta} \cdot \frac{dP}{dx} \quad (4.5)$$

Выведем уравнение неразрывности потока при фильтрационном питании отливки. Для того чтобы плотность жидкости при кристаллизации не изменялась, необходимо за время t за счет фильтрации подать в заданный объем V_0 некоторое количество жидкого сплава m_ϕ , который бы компенсировал объемную усадку. Плотность жидкости $\rho_{жс}$ в этом случае можно вычислить по формуле

$$\rho_{жс} = \frac{M - M\psi + m_\phi}{\frac{M}{\rho_{ж0}} - \frac{M \cdot \psi}{\rho_{мс}}} = \frac{(1 - \psi + \frac{m_\phi}{M}) \cdot \rho_{мс} \rho_{ж0}}{\rho_{мс} - \rho_{ж0} \cdot \psi}$$

Величину m_ϕ следует выбрать такой, чтобы в ходе всего процесса соблюдалось условие $\rho_{жс} = \rho_{ж0}$. Сократив $\rho_{жс}$ и $\rho_{ж0}$, получаем

$$1 = \frac{(1 - \psi + \frac{m_\phi}{M}) \cdot \rho_{мс}}{\rho_{мс} - \rho_{ж0} \cdot \psi}; \quad \rho_{мс} - \rho_{ж0} \cdot \psi = \rho_{мс} - \rho_{мс} \cdot \psi + \frac{m_\phi \cdot \rho_{мс}}{M};$$

$$\psi(\rho_{мс} - \rho_{ж0}) = \frac{m_\phi \cdot \rho_{мс}}{M}; \quad \frac{\psi(\rho_{мс} - \rho_{ж0})}{\rho_{мс}} = \frac{m_\phi}{M}; \quad \epsilon_v \cdot \psi = \frac{m_\phi}{M}$$

Массовый поток жидкости в объем $V = \frac{M}{\rho_{ж0}}$ через ограничи-

вающую его поверхность S в единицу времени равен, как известно из теории поля,

$$\frac{dm_\phi}{dt} = -\rho_{\text{ж0}} \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S},$$

где $\vec{v}$ – вектор скорости как функция координат точек поверхности.

Продифференцируем полученное выше уравнение по времени:

$$\varepsilon_V \frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{M} \cdot \frac{dm_\phi}{dt}; \quad \varepsilon_V \frac{d\psi}{dt} = -\frac{\rho_{\text{ж0}}}{\rho_{\text{ж0}} \cdot V} \cdot \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S};$$

$$\varepsilon_V \frac{d\psi}{dt} = -\frac{\int_S \vec{v} \cdot d\vec{S}}{V}.$$

Как известно из теории поля, $\frac{\int_S \vec{v} \cdot d\vec{S}}{V} = \text{div} \vec{v}$ – дивергенция вектора скорости. В итоге получаем уравнение неразрывности

$$\varepsilon_V \frac{d\psi}{dt} = -\text{div} \vec{v}. \quad (4.6)$$

Так как $\text{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$, где v_x, v_y, v_z – проекции скорости на соответствующие оси, то

$$\varepsilon_V \frac{d\psi}{dt} = -\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right). \quad (4.7)$$

Если это условие не выполняется, т.е. фильтрация недостаточна для полной компенсации усадки, то плотность жидкости будет уменьшаться.

Однако в силу резкого понижения давления жидкости при малейшем уменьшении ее плотности изменением плотности можно пренебречь вплоть до разрыва сплошности жидкости и образования поры. Поэтому полученное выше уравнение неразрывности, выведенное впервые Г.Ф. Баландиным, можно применять для описания любого режима фильтрации.

Математическая модель фильтрационного питания отливки должна включать в себя краевую задачу затвердевания отливки, позволяющую оп-

ределить долю твердой фазы ψ как функцию времени и координат, уравнение Дарси и уравнение непрерывности. Кроме того, должна быть задана функция, связывающая долю твердой фазы ψ с температурой в интервале ликвидус–солидус. Эксперименты показывают, что эту зависимость можно аппроксимировать формулой

$$\psi = \frac{(T_A - T)(T_A - T_c)}{(T_A - T)(T_A - T_c) + (T - T_c)(T_A - T_c)(1 - \kappa_0)},$$

где T_A – температура плавления основы сплава;

κ_0 – коэффициент распределения легирующего компонента.

Условие образования поры можно записать так: пора образуется, если давление в фильтрационном потоке в данной точке будет меньше вели-

чины $P_{кр} = \frac{[H]^2}{k_p^2}$, где $[H]$ – содержание водорода в сплаве, т.е. $P \leq P_{кр}$. По-

ристость в жидко-твердой зоне с объемом V_a равна

$$P = \frac{V_{пор}}{V_a} \cdot 100\% = \varepsilon_V (1 - \psi_{кр}) \cdot 100\%,$$

где $\psi_{кр}$ – доля твердой фазы, при которой выполнено указанное условие.

Данное значение пористости отнесено к жидко-твердой зоне. По отношению ко всей отливке величина пористости равна

$$P = \frac{V_{пор}}{V_{отл}} \cdot 100\% = \frac{V_{пор}}{V_a} \cdot \frac{V_a}{V_{отл}} \cdot 100\% = \varepsilon_V (1 - \psi_{кр}) \frac{V_a}{V_{отл}} \cdot 100\%,$$

где $\frac{V_a}{V_{отл}}$ – отношение объема жидко-твердой зоны в момент образования

пористости к объему отливки.

В первом приближении коэффициент проницаемости двухфазной зоны отливки можно выразить формулой

$$k = d^2 \frac{(1 - \psi)^3}{150\psi^2}, \quad (4.8)$$

где d – эффективный диаметр кристаллита.

Так как k убывает с увеличением доли твердой фазы ψ , то в процессе затвердевания фильтрационный поток, естественно, уменьшается. В ходе затвердевания эффективный диаметр кристаллита увеличивается. С некоторым приближением, считая кристаллиты сферическими, при заданном их числе в единице объема N_V можно получить формулу для вычисления d . Число кристаллитов в двухфазной зоне (ее ширина определяется в момент снятия перегрева в центре отливки) равно $N_k = N_V \cdot V_a$. Считая, что все они зародились в один момент времени, можно записать уравнение

$$\rho_{тв} \frac{\pi d^3}{6} = \frac{\psi V_a \cdot \rho_{ж-т}}{N_k}.$$

Приняв $\rho_{тв} \approx \rho_{ж-т}$, получаем

$$\frac{\pi d^3}{6} = \frac{\psi V_a}{N_V \cdot V_a}, \text{ или } d = \sqrt[3]{\frac{6\psi}{N_V \cdot \pi}}.$$

С учетом этого находим

$$k = \frac{(1-\psi)^3}{97,4 \sqrt[3]{\psi^4 \cdot N_V^2}}. \quad (4.9)$$

Методику численной реализации описанных физической и математической моделей образования усадочной пористости следует рассматривать на практических занятиях.

Не приводя промежуточных преобразований, выполним анализ формулы (4.10), связывающей пористость с технологическими факторами. Она получена для следующих условий. Отливка представляет собой плиту, высота которой значительно больше толщины ($H_0 \gg 2R$). Распределение температур в жидко-твердой зоне принято линейным (рис. 4.15). Оно описывается уравнением

$$T(x, t) = T_a - \frac{(T_a - T_c) m^2 t}{R^2 (1 - K_s)^2} - \frac{(1 - \frac{m^2 t}{R^2 (1 - K_s)^2})(T_a - T_c) x}{R(1 - K_s) - m\sqrt{t}},$$

где m – константа затвердевания, $\text{см} \cdot \text{с}^{-1/2}$;

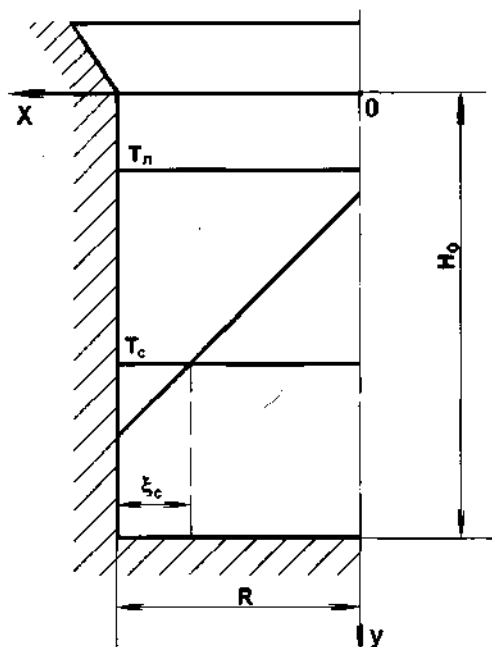


Рис. 4.15. Расчетная схема к упрощенному анализу фильтрационного питания

K_s – критерий характера затвердевания, равный относительной толщине твердой корки $\xi_{me}(t_d)$ в момент t_d снятия перегрева в центре отливки, $K_s = \xi_{me}(t = t_d) / R$.

Перемещение границы жидко-твердой зоны описывали формулой $\xi_{ж-т} = R(1 - K_s) - m\sqrt{t}$. После преобразования формула для оценки пористости в жидко-твердой зоне имеет вид

$$\Pi = \varepsilon_V \sqrt[3]{\frac{\varepsilon_V \mu (2H - y) y m^2 (T_A - T_c) (1 - \kappa_0)^3 \sqrt[3]{N_V^2} \cdot 48,7}{R^2 (1 - K_s)^2 (T_A - T_c) (P_0 - P_{sp})}}, \quad (4.10)$$

Повышение скорости затвердевания (увеличение коэффициента m) приводит к росту пористости отливки. Измельчение кристаллической структуры, если это не сопряжено с принятием соответствующих мер, приводит к росту пористости (увеличение N_V).

Важными технологическими факторами являются повышение давления на расплав P_0 и снижение содержания водорода в сплаве. С уменьшением толщины стенки отливки R усложняются условия фильтрационного питания и увеличивается пористость отливок. Очевидно, что по мере удаления от прибыли (увеличение y) пористость возрастает.

В реальных условиях картина фильтрационного питания значительно сложнее. Фильтрационный поток сплава развивается раньше, чем в осевой части отливки будет снят перегрев. До этого момента в центральной зоне отливки имеется жидкий сплав, который через междендритные каналы может фильтроваться в направлении фронта солидуса под действием перепада давлений, природа которого описана выше. Процесс кристаллизации сплава сопровождается движением в сторону фронта кристаллизации междендритной жидкости. Условия питания на этой стадии облегчены наличием в центре отливки жидкого сплава. Они существенно затрудняются при смыкании фронтов ликвидуса в центре отливки. При этом питающий расплав может поступать только из прибыли, т.е. длина фильтрационного пути значительно увеличивается.

Наиболее благоприятные условия создаются при заполнении формы и питании отливки из тигля через металлопровод, как это осуществляется при литье вакуумным всасыванием, под низким давлением и с противодействием. При использовании этих методов в верхней части металлопровода имеется достаточное количество жидкого расплава и, кроме того, есть возможность значительно повысить перепад давлений на расплав. Как показали исследования, проведенные при литье с противодействием на алюминиевых сплавах, при обычных условиях в отливках практически отсутствовала усадочная раковина, но наблюдалась значительная пористость. При увеличении перепада давлений до 0,3 МПа начинает выявляться концентрированная усадочная раковина и уменьшается пористость. При перепаде давлений 0,5 МПа пористость исчезает практически полностью. Дальнейшее повышение давления до 2,5 МПа не изменило характера усадочных дефектов, но несколько сместило усадочную раковину вверх. Следует отметить, что при значительном (до 2,5 МПа) повышении всестороннего действующего газового давления получают практически бездефектные отливки, но боковые и верхние поверхности вдавливаются внутрь, что искажает конфигурацию отливки.

Фильтрационному режиму питания предшествует режим так называемого суспензионного питания. Известно, что перегретые жидкие сплавы подчиняются реологическому закону ньютоновской жидкости и обладают неограниченной способностью к течению. Именно поэтому не возникает проблем с компенсацией объемной усадки в жидком состоянии. Как было показано в разд. 1, это относится к сплавам при температурах ниже температуры ликвидуса, доля твердой фазы в которых не превышает 8–10 %. При

большем количестве твердой фазы изменяется реологическая природа сплавов. Для их течения требуется выполнение условия $\tau > \tau_s$, где τ – касательные напряжения, создаваемые внешними силами; τ_s – предельное касательное напряжение сдвига для сплава. Так как с увеличением доли твердой фазы в расплаве с понижением его температуры τ_s возрастает, рано или поздно компенсация усадки за счет перемещения металлической суспензии как единого целого прекратится. При этом произойдет образование жесткой структуры суспензии, которая при дальнейшем охлаждении отливки ведет себя как капиллярно-пористое тело, и компенсация усадки осуществляется рассмотренным выше фильтрационным путем.

Нарушение условия $\tau > \tau_s$ происходит при некотором критическом содержании твердой фазы $\psi_{кр}$, которое зависит от природы сплава и давления, прилагаемого к отливке в процессе ее формирования. Температура сплава, соответствующая доле твердой фазы $\psi_{кр}$, называется *температурой нулевой жидкотекучести*.

На рис. 4.16 показано распределение величины предельного касательного напряжения сдвига τ_s и касательного напряжения τ , создаваемого активными силами, внутри жидко-твердой зоны в отливке ($0 \leq r < r_c$, где r_c – радиальная координата фронта солидуса). Так как с ростом r уменьшается температура сплава и увеличивается доля твердой фазы ψ , то величина τ_s по мере удаления от оси отливки резко возрастает. Видно, что $\tau > \tau_s$ при $r_{кр1} > r > r_{кр}$. Поэтому в данной зоне $dv/dt \neq 0$. В области $r_{кр1} < r < r_c$ может осуществляться только фильтрационное питание. На рис. 4.16, б показано распределение скорости суспензионного питания. В зоне $0 < r < r_{кр}$ имеет место стержневое течение ($\frac{dv}{dx} = 0$).

При затвердевании фронт солидуса перемещается к центру отливки, а кривая τ_s смещается вверх и влево. В некоторый момент кривая τ_s займет положение τ_{s2} (рис. 4.16, а), а фронт солидуса – r_{c2} . При этом $\tau < \tau_s$ для всей жидко-твердой зоны ($0 < r < r_{c2}$). Поэтому с данного момента времени прекратится суспензионное питание.

Очевидно, что за счет этапа суспензионного питания уменьшается ширина зоны фильтрационного питания, так как $r_{c2} < r_c (t = t_d)$, где t_d – время снятия перегрева в центре отливки.

Влияние суспензионного питания на процесс компенсации объемных усадочных дефектов для разных сплавов и условий различно. Например, структурирование алюминиевых сплавов происходит при температурах,

очень близких к температуре ликвидуса. Поэтому роль суспензионного питания при формировании отливок из этих сплавов очень незначительна.

Учет суспензионного питания связан с математическим описанием движения жидко-твердой фазы как B -тела, закономерности которого рассматриваются в разд. 5. С ростом прилагаемого к отливке перепада давлений P_0 влияние суспензионного питания на уменьшение пористости отливок увеличивается.

Анализу математической модели совместного действия суспензионного и фильтрационного питания должно быть посвящено несколько практических занятий.

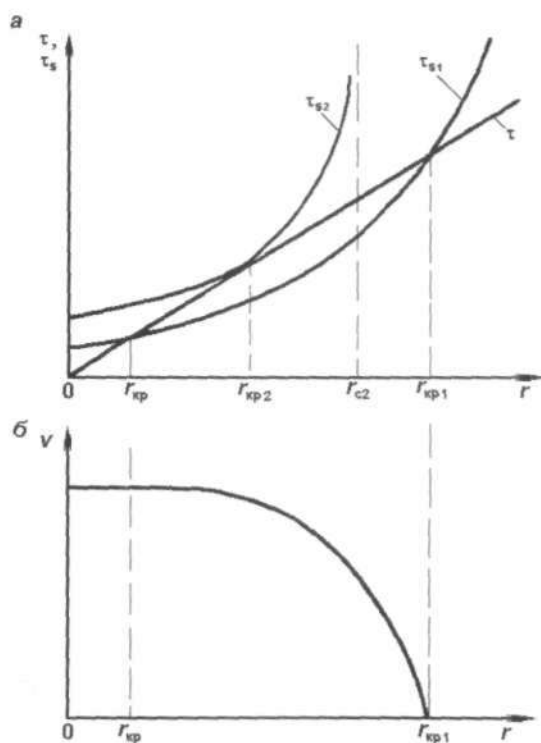


Рис. 4.16. Зависимость τ , τ_s (а) и V (б) от расстояния r до центра отливки

3.4. Методы борьбы с объемными усадочными дефектами. Расчет и конструирование прибылей

Практические меры борьбы с усадочными дефектами в отливках основываются на изложенных выше теоретических положениях. Основными методами устранения усадочных дефектов являются установка над каждым термическим узлом прибыли и оптимизация тепловых и гидродинамических условий питания отливки из прибыли. Конфигурация отливки и тепловые условия ее затвердевания должны отвечать условиям принципа направленного к прибыли затвердевания. Прибыль – дополнительный объем сплава, имеющий соответствующие размеры и конфигурацию, в который в процессе питания отливки выводятся усадочные дефекты. Расположена прибыль на термическом узле отливки. После охлаждения отливки прибыль удаляется (отрезается или отламывается) и передается на переплавку. Так как установка прибыли увеличивает расход сплава на изготовление отливки, нужно применять меры, направленные на повышение эффективности ее работы и снижение объема. Эффективность использования жидкого сплава характеризуется выходом годного ($BГ$). Он равен отношению черновой массы отливки $M_{отл}$ к массе жидкого сплава, залитого в форму, $M_{ж}$:

$$BГ = \frac{M_{отл}}{M_{ж}} \cdot 100\%.$$

При этом $M_{ж} = M_{отл} + M_{л.с} + M_{пр}$, где $M_{л.с}$ – масса литниковой системы; $M_{пр}$ – масса прибылей.

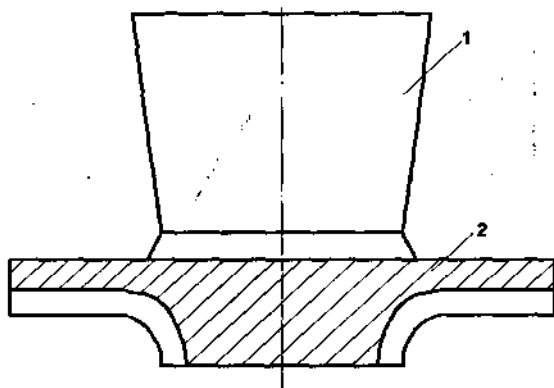


Рис. 4.17. Прибыль прямого действия:
1 – прибыль; 2 – отливка

Эффективность работы прибылей зависит от их расположения, размеров и конфигурации, тепловых и гидродинамических условий.

По направлению питания прибыли разделяются на прямые, местные и боковые. Прямые прибыли располагаются непосредственно над всем питаемым узлом (рис. 4.17). Так как сплав, компенсирующий усадку, подается при этом в отливку из прибыли по кратчайшему пути, то условия питания наиболее благоприятны. Недостатком прямых прибылей, если они устанавливаются, например, по всему периметру кольцевой отливки, является большой расход металла. С целью экономии металла можно устанавливать вместо одной сплошной прибыли несколько местных прибылей. Как видно из построенных изосолд (рис. 4.18), местные прибыли, если их установить на некотором максимально допустимом расстоянии друг от друга, обеспечивают хорошее питание отливки.

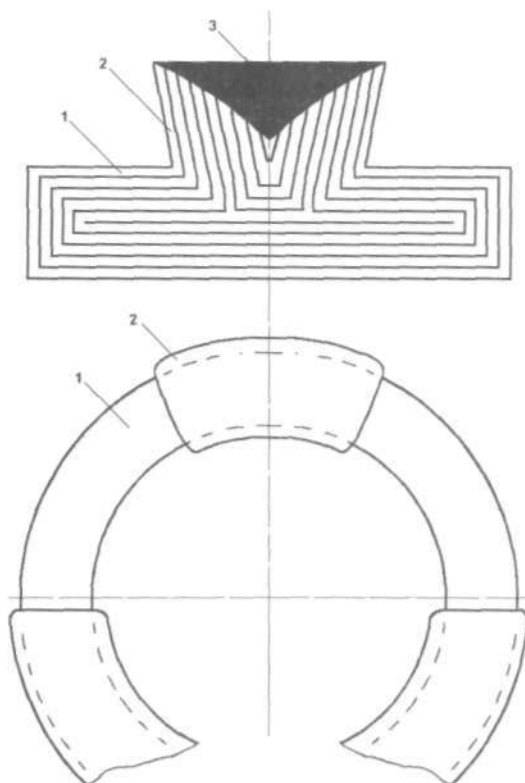


Рис. 4.18. Положение усадочной раковины в местной прибыли:
1 – отливка; 2 – прибыль; 3 – усадочная раковина

При применении местных прибылей прямое питание получают только части отливки, находящиеся непосредственно под прибылями (см. рис. 4.18). Части, находящиеся между прибылями, получают уже не прямое питание, а боковое. При этом различного рода включения не могут всплыть в прибыль. Поэтому на верхней поверхности необходимо предусматривать повышенные припуски на механическую обработку. Обычно суммарная длина местных секторных прибылей на отливках типа колес (рис. 4.19) составляет не менее $1/3$ и не более $2/3$ от периметра отливки.

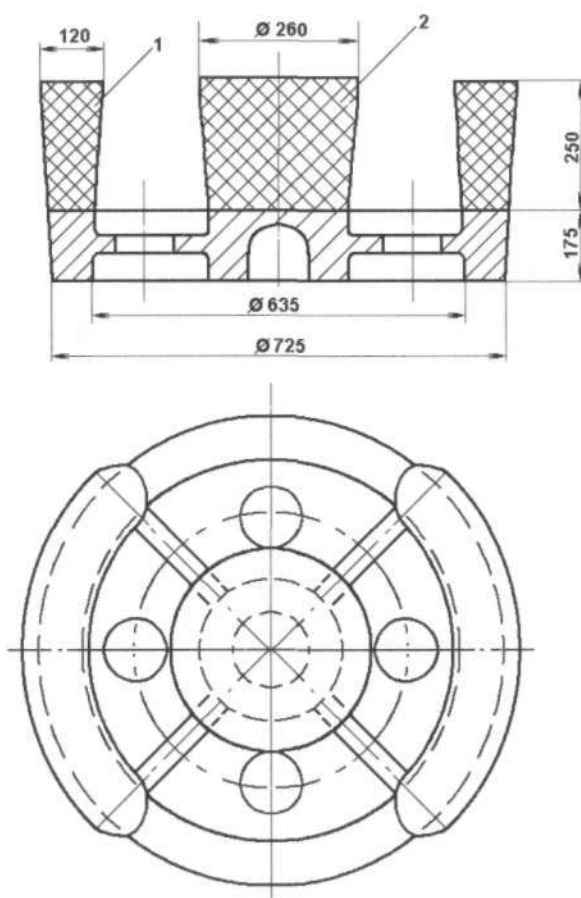


Рис. 4.19. Установка прибылей на отливке «Зубчатое колесо»:
1 – секторная прибыль на ободе; 2 – центральная прибыль на ступице

Местные прибыли обеспечивают питание примыкающих к ним участков отливки на определенную длину, называемую зоной действия прибыли. Зону действия прибыли определяют на основании эмпирических данных в зависимости от толщины питаемого узла (рис. 4.20). На-

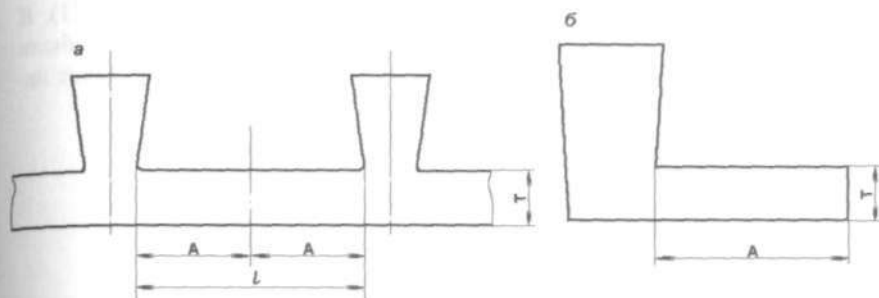


Рис. 4.20. Зоны действия прибылей:

а — установленных посреди отливки;

б — установленной у края отливки

пример, зона действия прибылей, установленных по схеме, изображенной на рис. 4.20, а, для сплава латуни равна $A=4T$, для силуминов $A=3T$. Вследствие влияния концевой эффекта (нарастание твердой корки на торцевой поверхности отливки) зона действия прибыли, установленной у края отливки (рис. 4.20, б), увеличивается и равна для латуни $A=5T$, а для силумина $A=6,5T$. Таким образом, расстояние между местными прибылями l не должно превышать удвоенную величину зоны действия прибыли, т.е. $l \leq 2A$. Если $l > 2A$, то в зависимости от характера затвердевания сплава за пределами зоны влияния прибылей в отливках будут образовываться усадочные дефекты в виде раковин или усадочной пористости.

Для протяженных отливок с большим отношением длины к толщине или ширине целесообразно применять боковые прибыли (рис. 4.21). Боковые прибыли применяют также при изготовлении отливок из сплавов, плохо обрабатываемых резанием (сталь 110Г13Л, ковкий чугун и т.п.).

Преимущества боковых прибылей по сравнению с верхними сводятся к возможности питания меньшими по объему прибылями протяженных отливок, снижению трудоемкости удаления прибылей от отливок (их можно отламывать или отрезать при значительно меньшей площади резки), уменьшению трудоемкости механической обработки подприбыльных участков отливки и т.д.

Место соединения боковой прибыли с отливкой называется шейкой прибыли.

Шейка прибыли может иметь приведенную толщину стенки, существенно меньшую, чем у отливки. Это объясняется влиянием прогрева формы около шейки прибыли протекающим через нее металлом, так как заливка в данных случаях осуществляется через прибыль (см. рис. 4.21). К моменту окончания заливки температура формы около шейки прибыли наибольшая и убывает по мере удаления от прибыли, что способствует направлению затвердевания.

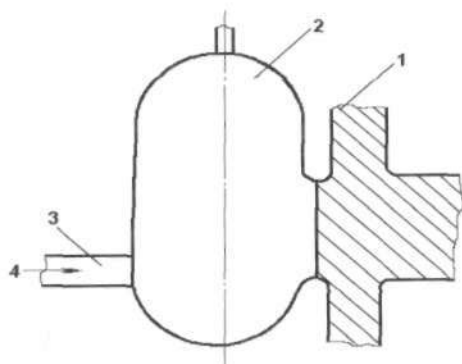


Рис. 4.21. Боковая прибыль для отливки из ковкого чугуна:
1 – отливка; 2 – прибыль; 3 – питатель; 4 – подвод сплава

Иногда боковые прибыли устанавливают на термических узлах отливки, расположенных на разной высоте. Такие прибыли называют потайными (рис. 4.22).

Для того чтобы прибыль работала так, как показано на рис. 4.22, необходимо обеспечить в ней некоторый баланс давления жидкого металла. Потайные прибыли являются закрытыми. Поэтому с момента образования на их поверхностях достаточно прочной корки затвердевшего металла жидкий расплав отсекается от внешнего атмосферного давления. Вследствие действия атмосферного давления со стороны открытой прибыли и увеличивающегося к низу отливки гидростатического давления, равного, например, для нижней прибыли $\rho g H_n$, перепад давлений будет направлен вниз, т.е. он будет обеспечивать перенос металла в прибыль, а не из прибыли в отливку. В этом случае установка потайных прибылей приведет к увеличению объема верхней прибыли, так как она должна компенсировать дополнительно усадку сплава в нижней прибыли. Прибыли начнут действовать только после затвердевания сечений $B - B$ и $A - A$ (см. рис. 4.22).

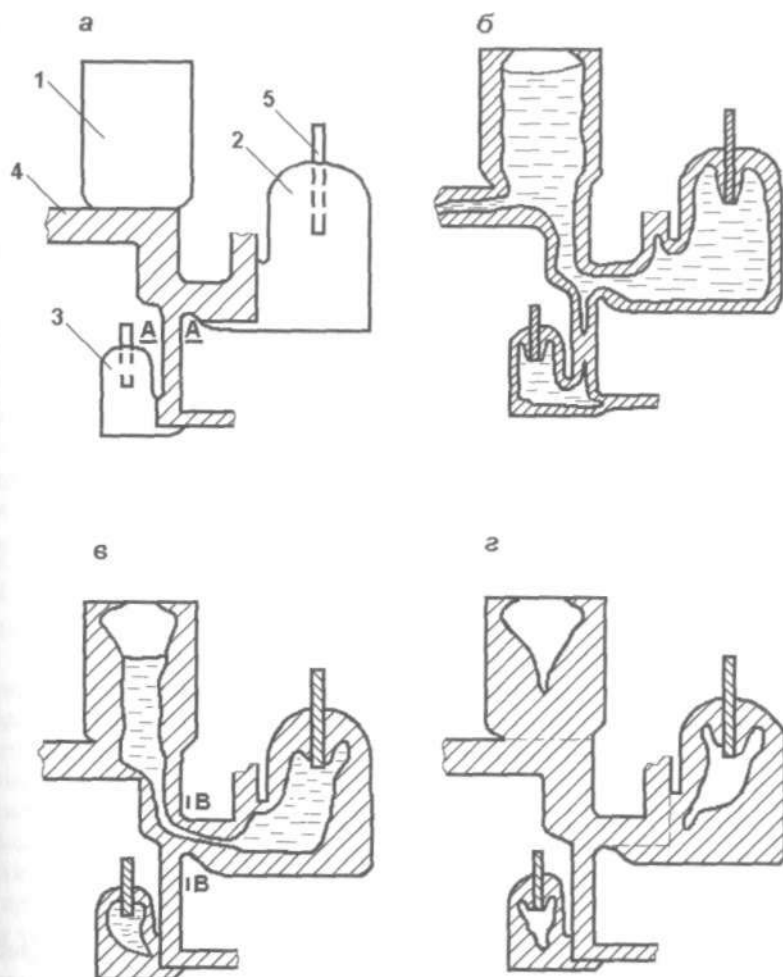


Рис. 4.22. Схема хода затвердевания отливки (а – г) с двумя закрытыми потайными и одной открытой прибылью:
1 – открытая прибыль; 2, 3 – закрытые потайные прибыли; 4 – отливка;
5 – газопроницаемый стержень

Для улучшения действия прибылей в них устанавливают газопроницаемые стерженьки, передающие внутрь прибыли атмосферное давление (см. рис. 4.22). Однако гидростатическое давление $\rho g H_n$ и $\rho g H_c$ в этом случае все равно оказывается некомпенсированным. Для обеспечения нужного баланса давлений целесообразно создать в прибылях повышенное газовое давление, равное для нижней и средней прибыли соответственно

$P_a + \rho g H_n$ и $P_a + \rho g H_c$. В этом случае все прибыли с самого начала будут действовать независимо: каждая будет питать свой узел.

По конфигурации различают шаровые или полушаровые, цилиндрические, конические, овальные, прямоугольные, призматические прибыли (рис. 4.23).

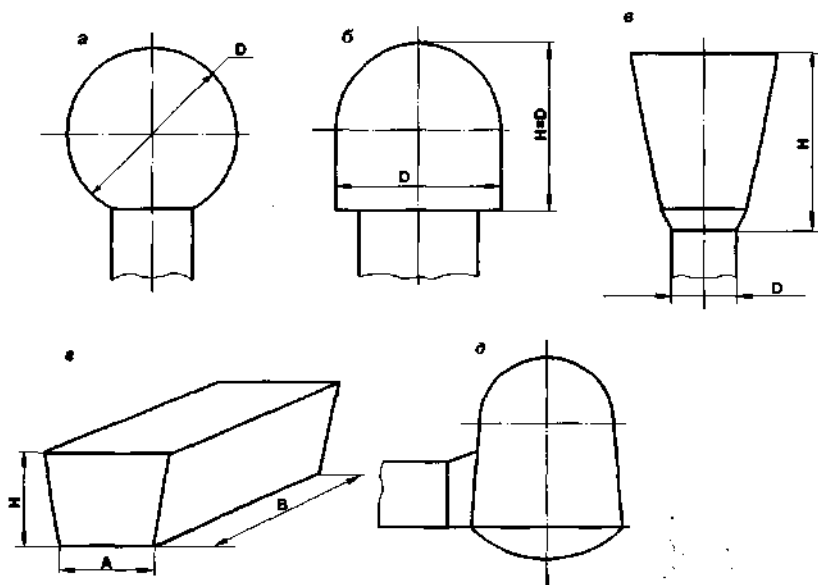


Рис. 4.23. Прибыли различных конфигураций:
а – шаровая; б – полушаровая; в – коническая; г – призматическая;
д – полушаровая боковая

С точки зрения тепловых условий работы конфигурация прибыли должна обеспечить при данном ее объеме минимальную поверхность охлаждения. Известно, что этому условию удовлетворяет шар. Однако такие прибыли сложно выполнить в форме, поэтому наиболее широко применяют полушаровые закрытые прибыли или конические открытые прибыли.

Часто используют прибыли, имеющие овальное горизонтальное сечение. При конструировании прибылей их конфигурация всегда увязывается с конфигурацией питаемого узла. Более детально вопросы конструирования прибылей изучаются в технологических курсах.

Рассмотрим основные принципы расчета прибылей. Прежде всего, прибыль должна иметь запас сплава, обеспечивающий компенсацию объемной усадки отливки и самой прибыли. Так как в процессе формирования

отливки на стенках прибыли происходит образование затвердевшей корки, то объем прибыли равен

$$V_{np} = V_{ус.p} + V_{з.к},$$

$$V_{ус.p} = \varepsilon_V (V_{отл} + V_{np}),$$

где $V_{ус.p}$ – объем усадочной раковины;

$V_{з.к}$ – объем затвердевшего сплава в прибыли.

Объем затвердевшего сплава зависит от тепловых условий работы прибыли и гидродинамических условий, определяющих скорость опускания сплава в прибыль. Чем больше интенсивность теплоотвода от прибыли и чем меньше скорость опускания уровня сплава в ней, тем больше $V_{з.к}$. Как следует из полученного выше уравнения неразрывности потока питающего жидкого сплава, скорость опускания сплава в прибыль непосредственно связана со скоростью выделения в расплаве отливки твердой фазы

$\frac{d\psi}{dt}$. Чем больше $\frac{d\psi}{dt}$, тем с большей скоростью может опускаться сплав в прибыль.

Однако эта потенциальная возможность в зависимости от характера затвердевания используется в разной степени. При последовательном затвердевании, за исключением питания осевых участков отливки, жидкий расплав полностью и практически мгновенно компенсирует появившийся в отливке дефицит питания. При объемном затвердевании в условиях фильтрационного и суспензионного питания скорость питающего потока существенно зависит от прилагаемого к расплаву давления. Если давление недостаточно велико, то, несмотря на наличие дефицита питания, расплав из прибыли не будет израсходован. При этом в отливке образуется большая усадочная пористость.

Коэффициент полезного использования металла в прибыли можно выразить как $\beta = \frac{V_{ус.p}}{V_{np}}$. Здесь, строго говоря, в величину $V_{ус.p}$ следует

включать весь дефицит питания, а не только собственно объем усадочной раковины. Величина β зависит от конфигурации прибыли, прилагаемого к расплаву давления и тепловых условий работы прибыли. Для обычных открытых прибылей $\beta=0,1$, для закрытых прибылей $\beta=0,11+0,15$, для прибылей с газовым давлением $\beta=0,13+0,2$. Применение подогрева сплава в прибылях позволяет значительно повысить β и снизить расход металла на

прибыли. Если принять, что коэффициент β известен, то можно рассчитать объем прибыли по простой формуле, впервые полученной Й. Прижибылом:

$$V_{\text{ус.р}} = \varepsilon_V (V_{\text{отл}} + V_{\text{пр}}); V_{\text{ус.р}} = \beta V_{\text{пр}}; \beta V_{\text{пр}} = \varepsilon_V V_{\text{отл}} + \varepsilon_V V_{\text{пр}}.$$

Отсюда $V_{\text{пр}} = (\beta - \varepsilon_V) = \varepsilon_V V_{\text{отл}}$, или

$$V_{\text{пр}} = \varepsilon_V \frac{V_{\text{отл}}}{\beta - \varepsilon_V}. \quad (4.11)$$

Здесь $V_{\text{отл}}$ – объем узла отливки, питаемого данной прибылью. Высота прибыли принимается равной ее диаметру или несколько большей.

Классический метод расчета прибылей сводится к определению глубины проникновения усадочной раковины в систему отливка – прибыль. Высоту прибыли устанавливают, исходя из обеспечения полного расположения усадочной раковины в прибыли с некоторым запасом.

В основе математического расчета прибылей на ЭВМ лежит балансный принцип расхода сплава из прибыли на питание в процессе затвердевании отливки при определении контура усадочной раковины. Кроме балансного уравнения модель включает дифференциальные уравнения, описывающие кинетику затвердевания сплава в отливке и прибыли. Навыки машинного расчета прибылей студент должен получить на практических занятиях.

Приведенная ниже формула (4.12) получена для плоской отливки толщиной $2R_o$ при следующих допущениях:

- 1) фронт солидуса в отливке продвигается по закону $\xi_{c.o} = m_o \sqrt{t}$, а в прибыли – по закону $\xi_{c.n} = m_n \sqrt{t}$, где $m_o > m_n$;
- 2) толщина прибыли равна $2R_n > 2R_o$;
- 3) вся усадка приведена к температуре солидуса и включает усадку в жидком состоянии и при затвердевании.

$$H_{\text{пр}} = k \left[\left(1 - \frac{m_n R_o}{m_o R_n} \right)^{-\varepsilon_V} - 1 \right] \left(H_o + \frac{(H_o + R_o)(m_o - m_n) + R_n m_n}{m_n} \right), \quad (4.12)$$

где k – коэффициент запаса (обычно $k=1,5+3$).

Как правило, отношение приведенных размеров прибыли и отливки принимают в пределах $R_n/R_o=1,15+1,5$.

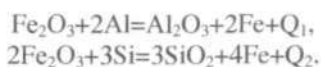
Выполним расчет высоты прибыли для стальной отливки: $R_n/R_o=1,25$; $R_o=15$ см; $R_n=18,75$ см; $\varepsilon_V=0,06$; высота отливки $H_o=40$ см; $m_o=0,085$ см/с^{1/2}; $m_n=0,060$ см/с^{1/2}.

$$H_{np} = \left[\left(1 - \frac{0,06 \cdot 15}{0,085 \cdot 18,75} \right)^{-0,06} - 1 \right] \times \\ \times \left(40 + \frac{55 \cdot 0,025 + 18,75 \cdot 0,06}{0,06} \right) = 2 \cdot 0,05 \cdot 80 = 8 \text{ см.}$$

Для того чтобы уменьшить m_n по сравнению с m_o , необходимо применить подвод сплава в прибыль, использовать смесь с меньшим коэффициентом аккумуляции тепла, а для крупных отливок осуществить доливку металла в прибыль из ковша. В рассмотренном примере при $m_n=m_o=0,085$ высота прибыли равна $H_{np}=2 \cdot 0,11 \cdot 95=21$ см. Видно, что снижение интенсивности затвердевания сплава в прибыли приводит к уменьшению ее объема.

Существенного уменьшения объема затвердевшего в прибыли сплава, а, следовательно, и необходимого ее объема можно добиться, применяя обогрев прибыли экзотермическими смесями. Из этих смесей изготавливают стаканы или втулки, которые устанавливают в прибыльные части полости формы (рис. 4.24).

Существуют различные по составу экзотермические смеси. Экзотермическая реакция, сопровождающаяся выделением большого количества тепла, представляет собой реакцию восстановления окиси железа алюминием (алюмотермия) или кремнием (силикотермия):



Кроме алюминиевого порошка, ферросилиция и окалины смесь содержит связующее для придания ей прочности во влажном состоянии и после сушки, а также древесные опилки, гипс, молотый шамот, глину для обеспечения газопроницаемости смеси и регулирования интенсивности экзотермической реакции.

Расчет экзотермических прибылей сводится к определению номера нормализованной экзотермической оболочки для оформления прибыли. Подбор оболочек осуществляют по массе прибыли m_{np} . Массу прибыли находят по специально разработанным номограммам. Принципиально ее можно определить по формуле Й. Пржибыла, приняв $\beta=0,2+0,25$, или с использованием полученной выше формулы для расчета высоты прибыли,

приняв константу затвердевания в 1,5–2 раза меньшей, чем для прибыли в обычной песчаной форме. По массе прибыли находят размеры экзотермических оболочек по нормализованным таблицам (табл.4.1).

Выше было сказано о большой роли в повышении эффективности

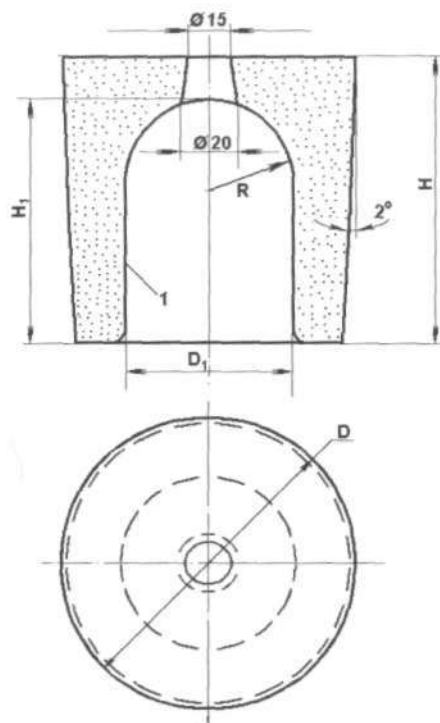


Рис. 4.24. Экзотермическая оболочка для круглой прибыли:
1 – внутренняя поверхность прибыли

работы прибылей и их экономичности перепада давлений, действующего на кристаллизующийся расплав. Так, П.И. Ямшановым были предложены прибыли с повышенным газовым давлением, создаваемым диссоциацией при высоких температурах мела, карбоната магния или цинка:



Таблица 4.1

Нормаль на экзотермические оболочки для круглых прибылей

Номер прибыли	Масса прибыли, кг	Размеры, мм				
		D	H	D_1	H_1	R
1	4,4	125	125	90	115	40
2	5,8	140	130	100	120	45
3	8,2	170	150	115	135	50
4	12,5	195	175	135	155	60
5	21,0	225	205	160	180	70
6	36,0	260	240	190	210	85
7	57,0	300	280	225	245	100
8	70,0	320	300	235	260	105
9	95,0	365	340	260	285	120
10	130,0	390	380	285	330	130
11	165,0	410	430	300	375	135
12	210,0	420	480	310	420	140

Определенная масса данных веществ помещается в специальный патрон, устанавливаемый внутри закрытой прибыли (рис. 4.25). Оболочки и крышки патронов изготавливают уплотнением в металлических ящиках смесей, состоящих из глины, молотого шамота и древесных опилок, добавляемых для повышения газопроницаемости оболочки. Оболочки сушат при 100–110 °С и обжигают при 350 °С. Главное требование к оболочке сводится к тому, что ее толщина должна обеспечивать прогрев помещенного в нее наполнителя до температуры диссоциации не раньше, чем на стенках прибыли вырастет достаточно прочная корка затвердевшего сплава, способная выдержать повышенное давление.

Параметры прибыли, патрона и массу заряда определяют по эмпирически разработанным номограммам. Массу прибыли можно определить, например, по формуле Й. Пржибыла, приняв в ней $\beta=0,13+0,20$.

В зависимости от массы прибыли и создаваемого давления по номограмме, приведенной на рис. 4.26, определяют массу мела, помещенного в патрон.

Применение прибылей газового давления позволяет не только повысить выход годного, но и существенно снизить пористость отливок.

Детальное изучение методов расчета и конструирования прибылей для отливок из различных сплавов предусмотрено в соответствующих технологических курсах. Приближенные аналитические и эмпирические формулы для расчета прибылей получены А.А. Рыжиковым, Б.Б. Гуляевым, Ф.Ф. Василевским, Н. Бишопом и В. Джонсоном, Р. Намюром и др. Главной особенностью этих методов является их ориентация на последовательно затвердевающие сплавы и усадочные дефекты, проявляющиеся главным

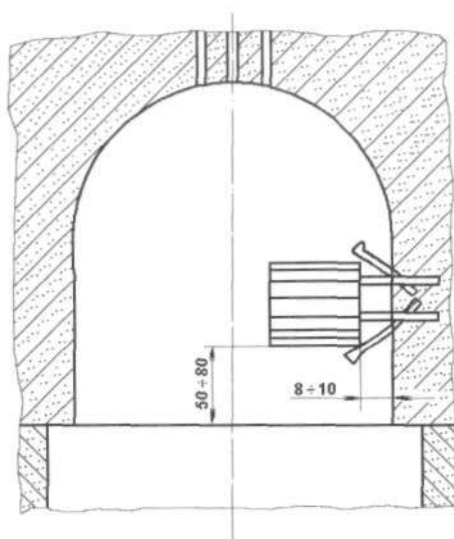


Рис. 4.25. Расположение газового патрона в прибыли

образом в виде усадочной раковины. Их применение к объемно затвердевающим сплавам неправомерно, так как усадочная раковина в этих случаях очень мала по объему по сравнению с объемом пор.

Методику расчета прибылей при объемном затвердевании сплава можно построить, исходя из следующих принципов:

1) прибыль должна быть достаточно теплоизолирована (например, при кокильном литье стенки прибыльных частей оклеиваются листовым асбестом или покрываются специальной краской). При этом необходимо выполнение следующего условия: продолжительность снятия перегрева в центре прибыли должна быть не меньше продолжительности затвердевания отливки;

2) объем прибыли должен быть достаточным для компенсации объемной усадки отливки и прибыли. Его можно найти по формуле Й. Пржибыла, приняв в ней $\beta=0,2+0,25$;

3) высота прибыли и прилагаемое к сплаву в прибыли давление P_o должны обеспечить фильтрационное питание отливки, гарантирующее заданный уровень пористости в ней. Давление $(P_o + \rho g H_n)$, обеспечивающее заданное значение пористости, в первом приближении можно найти с использованием формул, полученных выше.

В заключение рассмотрим прибыли с облегченным отделением от отливок (рис. 4.27). Между прибылью и питаемым узлом устанавливают

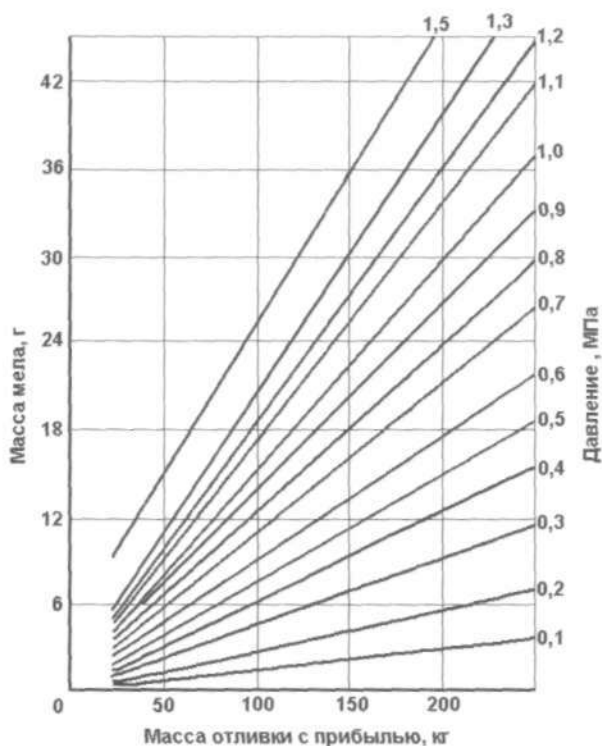


Рис. 4.26. Номограмма для определения массы мелового заряда в зависимости от давления и массы отливки с прибылью

перегородку в виде керамической пластины. Важнейшим требованием является совпадение оси отверстия в перегородке с термическими центрами прибыли и отливки. При нарушении этого требования в отливке образуется усадочная раковина. Параметры перегородки и размеры отверстия выбирают таким образом, чтобы перегородка быстро прогревалась до температур, исключающих образование на ее поверхностях затвердевшего металла. Обычно диаметр прибыли D_{np} определяют по формуле

$$D_{np} = d_{en} + (0,1 \div 0,2) \cdot \sqrt[3]{Q},$$

где d_{en} — диаметр окружности, вписанной в термический узел питаемой отливки, дм;

Q — масса питаемого узла, кг.

Высоту прибыли принимают равной $(1+1,5)D_{np}$. Толщину пластины и диаметр отверстия в ней определяют в зависимости от значения диаметра прибыли по соответствующим таблицам.

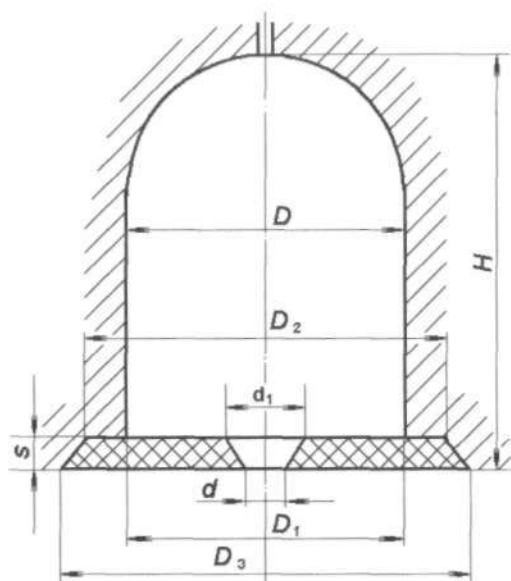


Рис. 4.27. Конструкция легкоотделяемой прибыли

Глава 4. ЛИТЕЙНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ В ОТЛИВКАХ

В предыдущей главе были рассмотрены явления, связанные с развитием объемной усадки в процессе формирования отливки. Пока сплав, имеющий температуру внутри интервала кристаллизации, сохраняет характерную для жидкости текучесть, усадочные явления проявляются как объемные. Линейные размеры при этом определяются, как и у любой жидкости в условиях действия земного тяготения, размерами сосуда, в котором она находится. В процессе охлаждения уменьшается только объем. Собственно линейная усадка, т.е. независимое уменьшение линейных размеров отливки при понижении ее температуры, начинает развиваться только после потери сплавом текучести в конкретных силовых условиях формирования отливки. По предложению И.И. Новикова с этой точки зрения интервал кристаллизации сплава можно разбить на две зоны: жидко-твердую и твердо-жидкую. В жидко-твердой зоне (при $T_y < T \leq T_d$, где T_y – температурная граница зон) сплав сохраняет текучесть. При $T_d \leq T \leq T_y$ в твердо-жидкой зоне интервала кристаллизации в сплаве содержится количество твердой фазы, необходимое для образования каркаса, проявляющего свойство твердого тела сохранять ранее приданную ему конфигурацию. Эту нижнюю часть интервала кристаллизации А.А. Бочвар назвал эффективным интервалом кристаллизации сплава (ЭИК). В пределах ЭИК кристаллиты образуют остов отливки, но частично отделены друг от друга прослойками расплава. Так как при $T < T_y$ сплав теряет текучесть, то, начиная с $T = T_y$, в отливке будет происходить линейная усадка. При $T > T_y$ реализуется только объемная усадка.

4.1. Горячие трещины в отливках

Если свободную линейную усадку отливки затормозить, то в ней возникнут напряжения растяжения. На рис. 4.28 показана схема формы для изготовления отливки «Крышка». При температуре $T = T_y$ размер отливки l_o равен размеру формы. Если участок формы между боковыми стенками отливки абсолютно податлив, то при охлаждении отливки до температуры T произойдет ее полная усадка и длина отливки будет равна $l = l_o(1 - \alpha_m(T_y - T))$. При этом никаких напряжений в ней не возникает. Если форма абсолютно неподатлива, то отливка сохранит размер l_o , т.е. ее длина будет больше того значения, которое она должна иметь при температуре T , на величину

$\Delta l = l_o - l_o(1 - \alpha_m(T_y - T)) = l_o \alpha_m(T_y - T)$. Таким образом, отливка получит в данном случае относительную деформацию растяжения $\varepsilon_y = \frac{\Delta l}{l_o} = \alpha_m(T_y - T)$.

Если форма обладает некоторой податливостью, то относительная деформация растяжения уменьшается на величину ε_n , где ε_n – относительная деформация формы за время усадки. Если учесть расширение участка формы между ребрами вследствие ее прогрева, то результирующая относительная деформация отливки будет удовлетворять равенству

$$\varepsilon = \varepsilon_y - \varepsilon_n + \varepsilon_p,$$

где ε_p – относительная деформация формы вследствие ее теплового расширения.

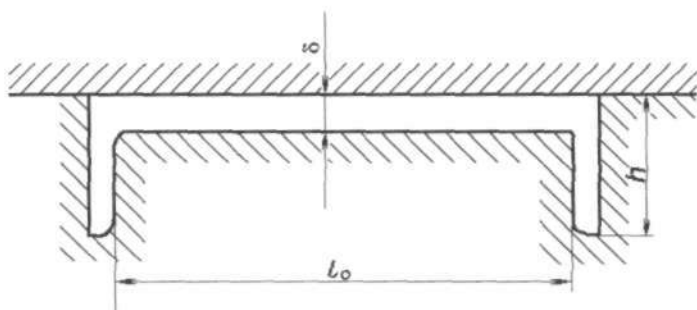


Рис. 4.28. Схема формы для получения отливки «Крышка»

С уменьшением температуры внутри ЭИК увеличиваются ε_y и ε_p , т.е. относительная деформация отливки ε растет, достигая при $T = T_c$ наибольшего значения $\varepsilon_{\max} = \alpha_m(T_y - T_c)$, если пренебречь величинами ε_n и ε_p . В случае, если деформация растяжения отливки ε превзойдет деформационную способность ε_0 в отливке возникнет горячая трещина.

Таким образом, необходимое условие образования горячих трещин сводится к торможению свободной линейной усадки сплава во время его затвердевания в литейной форме. Достаточное условие выражает неравенство $\varepsilon \geq \varepsilon_0$, т.е. образование трещин происходит в момент превышения относительной деформацией сплава ε его деформационной способ-

ности ε_0 . Таким образом, для образования трещины необходимо, чтобы $\varepsilon_y - \varepsilon_n + \varepsilon_p \geq \varepsilon_0$.

Из этого неравенства вытекают следующие пути борьбы с горячими трещинами:

- 1) повышение податливости форм, т.е. увеличение ε_n ;
- 2) совершенствование конструкции отливки с целью исключения торможения линейной усадки;
- 3) синтез сплавов, обладающих низкими значениями относительной линейной усадки (уменьшение α_m) и высокой деформационной способностью ε_0 .

Комплекс конкретных технологических мероприятий, направленных на исключение трещин в отливках, будет рассмотрен в конце этой главы.

Особое место среди данных мероприятий занимает повышение сопротивляемости сплавов образованию горячих трещин. Под термином «горячеломкость сплавов» понимают их технологическое свойство образовывать горячие трещины в отливках. Для определения этого свойства применяют различные технологические пробы (рис. 4.29). Горячеломкость сплава характеризуется значением длины образца L_0 , начиная с которой в отливках образуются трещины. Чем больше L_0 , тем в меньшей степени сплав склонен к образованию трещин, т.е. тем меньше его горячеломкость.

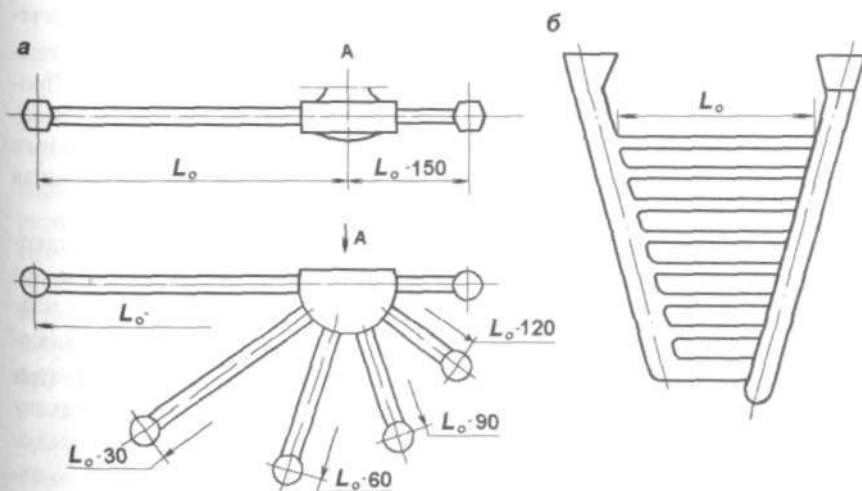


Рис. 4.29. Конструкция проб на горячеломкость сплавов:
а – проба А. Татюра; б – проба Н.Н. Прохорова

В качестве примера можно привести так называемую кольцевую пробу, которая представляет собой кольцо, залитое в кокиль с металлическим стержнем. Показателем горячеломкости является отношение протяженности самой большой трещины к радиальному сечению кольца, выраженное в процентах. Например, для сплава Al-Si в зависимости от содержания кремния этот показатель изменяется в пределах от 10 до 50 %. Часто для характеристики горячеломкости из сплава изготавливают несколько колец разной толщины (от 5 до 42,5 мм). Критерием горячеломкости в данном случае служит наибольшая толщина кольца, выраженная в миллиметрах, при которой появляется трещина. Чем меньше толщина кольца, тем меньше склонен сплав к образованию горячих трещин. Выбор той или иной пробы зависит от ее чувствительности для данной группы сплавов. Поэтому более подробно методика оценки горячеломкости сплавов рассматривается в технологических курсах.

4.1.1. Теория горячеломкости сплавов

Одним из первых систематических исследований горячеломкости сплавов проводил А.А. Бочвар. По его мнению, горячеломкость сплавов связана с шириной ЭИК. С увеличением ширины ЭИК повышается склонность сплава к образованию горячих трещин (рис. 4.30).

В соответствии с теорией горячеломкости, разработанной Н.Н. Прохоровым, деформационная способность сплавов ϵ_0 определяется пластической деформацией растяжения сплавов $\epsilon_{пл}$ в момент разрушения при температуре солидуса. Механизм образования горячих трещин, по Н.Н. Прохорову, сводится к следующему. Расплав в эффективном интервале температур представляет собой кристаллиты, отделенные друг от друга тонкими прослойками жидкого сплава. Принятая Н.Н. Прохоровым упрощенная схема строения сплава в ЭИК приведена на рис. 4.31.

При температуре T_y начала свободной линейной усадки жидкотвердый расплав теряет свою подвижность как единое целое. На схеме показаны кубические кристаллиты, разделенные прослойками жидкого сплава. При полном торможении усадки размер l_0 остается в процессе охлаждения сплава постоянным, а размер прослоек δ будет уменьшаться. При этом, как было показано выше, вследствие объемной усадки кристаллизующейся жидкости ее давление будет иметь тенденцию к уменьшению. Так как система лишена подвижности вдоль размера l_0 , возможно лишь перемещение кристаллитов навстречу друг другу в перпендикулярном направлении под действием возникающего перепада давлений. При этом жидкий сплав из области вертикальных прослоек перемещается в область

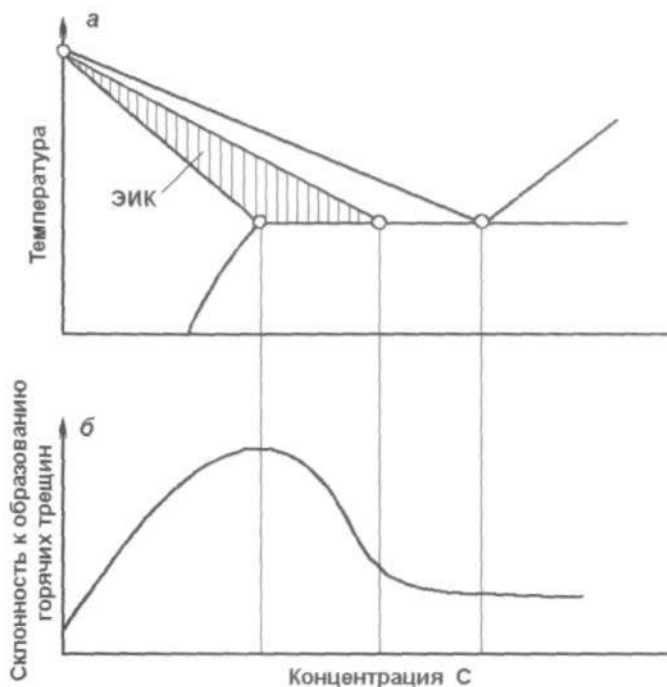


Рис. 4.30. Зависимость горячеломкости сплава от величины эффективного интервала кристаллизации (по А.А. Бочвару):
 а – эффективный интервал кристаллизации (заштрихован);
 б – горячеломкость сплава

горизонтальных, компенсируя там объемную усадку. Подобный процесс развивается до полного исчезновения вертикальных прослоек (в соответствии со схемой) (рис. 4.31, б).

Дальнейшая усадка сплава будет сопровождаться порообразованием и формированием трещины. Н.Н. Прохоров для приведенной на рис. 4.31 структуры сплава выполнил вывод формулы, позволяющей рассчитать его деформационную способность в условиях одноосного изотермического растяжения вдоль оси y . Объем жидкого сплава, приходящегося на один кристаллит в начале деформирования, равен $(1+\delta)^3 l^3$. После деформирования объем жидкости составляет $l^2(1+\delta_1)l^3$. Приравняв эти выражения, получим $(1+\delta)^3 = l^2(1+\delta_1)$. Отсюда $\delta_1 = 3\delta + \frac{3\delta^2}{l} + \frac{\delta^3}{l^2}$. Относительная

деформация растяжения равна $\varepsilon_{нл} = \frac{\delta_1 - \delta}{l + \delta} = \delta \frac{2 + \frac{\delta}{l}}{l}$.

Доля твердой фазы в сплаве при температуре T равна $\psi = \frac{l^3}{(l + \delta)^3} = \left(\frac{l}{l + \delta}\right)^3$. Отсюда получаем $\frac{\delta}{l} = \frac{1}{\psi^{1/3} - 1}$. С учетом этого

$$\varepsilon_{нл} = \frac{1}{\psi^{2/3}} - 1. \quad (4.13)$$

Из формулы И.Н. Прохорова следует, что по мере снижения температуры уменьшается деформационная способность сплава $\varepsilon_{нл}$, так как при этом доля твердой фазы ψ увеличивается. При температуре солидуса $\psi=1$ и $\varepsilon_{нл}=0$.

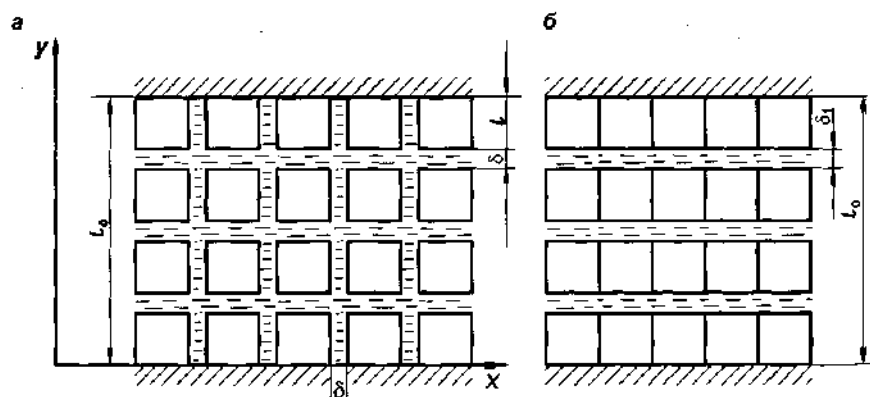


Рис. 4.31. Схема к расчету предельной пластической деформации затвердевающего сплава (по И.Н. Прохорову): а – начало процесса; б – конец процесса

На рис. 4.32 показан характер зависимости $\varepsilon_{нл}$ от температуры внутри интервала кристаллизации, определенный экспериментально для сплава алюминия с 0,6 % Si. Здесь же отражена зависимость относительной свободной линейной усадки ε_y от температуры в соответствии с формулой $\varepsilon_y = \alpha_{те}(T_y - T)$. Величину $\Delta = \min(\varepsilon_{нл} - \varepsilon_y)$ И.Н. Прохоров назвал запасом

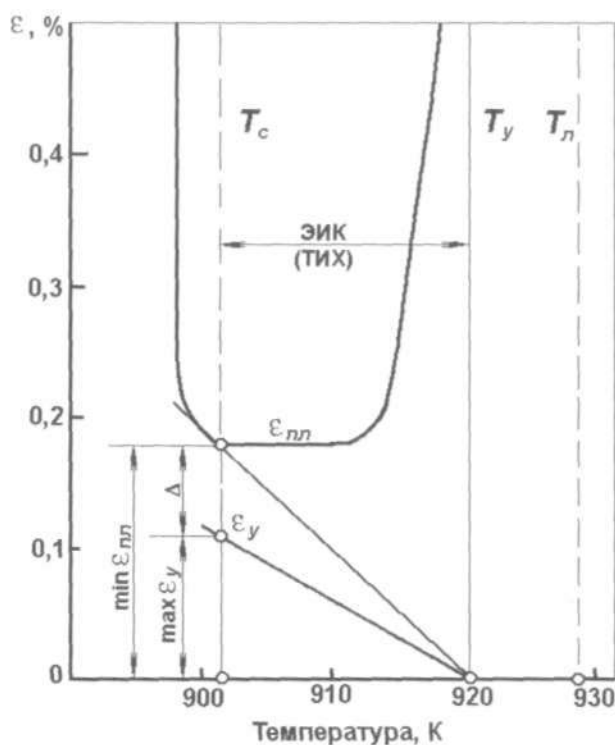


Рис. 4.32. Характер изменения $\epsilon_{пл}$ и ϵ_y для сплава алюминия с 0,6 % Si (по Н.Н. Прохорову) в зависимости от температуры

пластичности сплава, а интервал температур ($T_y - T_c$) — температурным интервалом хрупкости (ТИХ). Видно, что вопреки формуле Н.Н. Прохорова величина $\epsilon_{пл}$ при температуре солидуса не равна нулю и при дальнейшем охлаждении увеличивается. Многочисленные эксперименты показывают, что температурный интервал горячеломкости (ТИГЛ) не обязательно примыкает к температуре солидуса, а может иногда охватывать весь температурный интервал хладноломкости.

Очевидно, что реальный механизм образования горячих трещин значительно сложнее рассмотренного выше. Прежде всего, кристаллиты имеют гораздо более сложное строение, чем показано на рис. 4.31. Чаще всего они имеют вид разветвленных, сцепленных друг с другом дендритов. При нагружении происходит не только рассмотренная выше циркуляция жидкого сплава, но и непосредственная деформация кристаллитов. Для выяс-

нения вопроса о деформационной способности сплава необходимо установить соответствующий его поведению реологический закон. Простейшие реологические модели были рассмотрены в разд. 1.

4.1.2. Реологическая модель сплава в интервале кристаллизации

Систематические исследования реологических свойств сплавов в интервале кристаллизации были выполнены Г.Ф. Баландиным и Л.П. Каширцевым. На основе анализа экспериментальных данных, полученных для алюминиевых сплавов, они установили, что реологическое поведение сплавов в интервале кристаллизации соответствует поведению сложного тела, состоящего из последовательно соединенных тел Бингама и Кельвина, т.е. реологическая формула сплава $T=B-K$. Тела Бингама и Кельвина были рассмотрены в разд. 1. Реологическая схема сплава приведена на рис. 1.36. На рис. 4.33 показаны кривые деформации кристаллизующегося алюминия А7 под действием постоянной нагрузки. Используя схему, приведенную на рис. 1.36, получим реологические уравнения, описывающие поведение сплавов в интервале кристаллизации. Эти уравнения впервые были выведены Л.П. Каширцевым. На схеме последовательно соединены

три тела: тело Гука H_1 , тело $(\frac{S}{N_1})$ и тело Кельвина $(\frac{H_2}{N_2})$. Поэтому суммарная деформация всего тела y равна сумме деформаций этих трех тел, т.е. $y=y_1+y_2+y_3$.

Используя реологические законы указанных тел, рассмотренные в разд. 1, можно записать следующие уравнения для напряжений:

$$\tau = \eta G_1 \dot{\gamma}_1 \quad (4.14)$$

$$\tau = \eta_2 G_2 + \eta_2 \dot{\gamma}_2 \quad (4.15)$$

Для тела $(\frac{S}{N_1})$ запишем

$$\dot{\gamma}_2 = 0 \text{ и } \gamma_2 = 0, \text{ если } \tau \leq \tau_s; \quad (4.16)$$

$$\dot{\gamma}_2 = \frac{\tau - \tau_0}{\eta_1}, \text{ если } \tau > \tau_s. \quad (4.17)$$

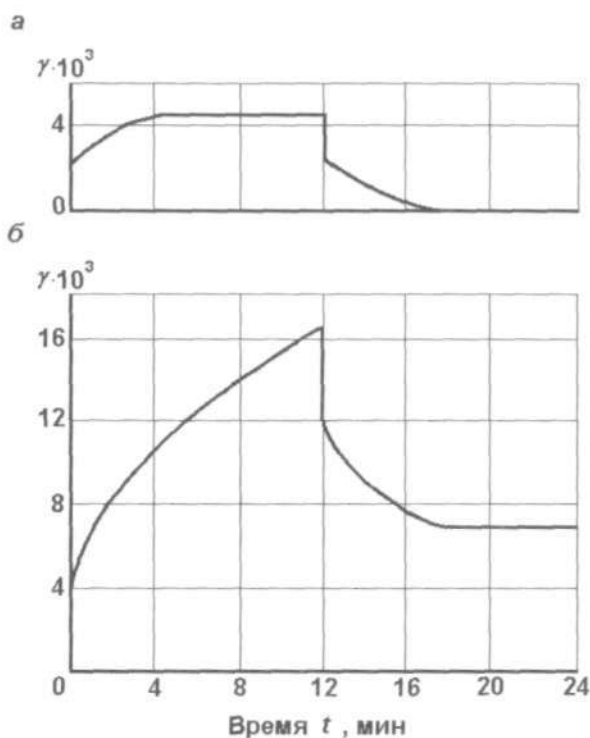


Рис. 4.33. Кривые деформации алюминия А7:

а – $T < T_s$; б – $T > T_s$

Приведенные уравнения полностью описывают реологическое поведение сплава. Однако, для того чтобы замкнуть эту систему уравнений, необходимо для каждого сплава знать величину предельного напряжения сдвига τ_s , модуля упругости при сдвиге G_1 , модуля G_2 , пластической вязкости η_1 и псевдовязкости Кельвина η_2 как функции температуры. По данным Л.П. Каширцева, все указанные величины в интервале кристаллизации по мере приближения к температуре солидуса резко возрастают. Пример температурных зависимостей реологических характеристик для сплава алюминия с 0,6 % Si приведен на рис. 4.34.

Из системы уравнений (4.14)–(4.15) следует, что деформация сплава является суммой упругой деформации γ_1 , пластической остаточной деформации γ_2 и деформации упругого последствия (обра-

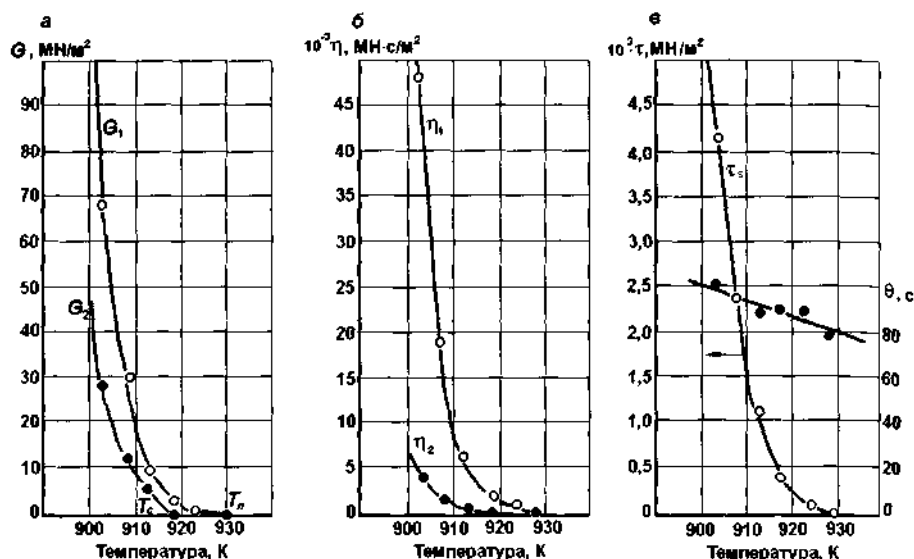


Рис. 4.34. Реологические характеристики сплава алюминия с 0,6 % Si в интервале температур кристаллизации (по данным Л.П. Каширцева): а – модуль G ; б – вязкость η ; в – предельное напряжение сдвига τ_s

тимой пластической деформации) γ_3 . Для того чтобы определить, какая из этих деформаций влияет на деформационную способность сплава, выполним, следуя Л.П. Каширцеву, относительное сравнение их величин.

Уравнения (4.14)–(4.17) позволяют при заданном значении напряжения τ определить развитие как суммарной деформации сплава, так и отдельных ее составляющих, если известны реологические характеристики сплава при данной температуре.

При анализе деформационной способности сплавов чаще всего образцы сплава при температуре внутри интервала кристаллизации подвергают механическим испытаниям при постоянной скорости деформации.

Пусть сплав испытывается при постоянной скорости деформации $\dot{\gamma} = V/D = \text{const}$. Преобразуем исходную систему уравнений:

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2 + \dot{\gamma}_3 = V/D; \quad (4.18)$$

$$\ddot{\gamma} = \ddot{\gamma}_1 + \ddot{\gamma}_2 + \ddot{\gamma}_3 = 0; \quad (4.19)$$

$$\dot{\gamma}_3 = VД - \dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_2. \quad (4.20)$$

При $\tau \leq \tau_s$ $\dot{\gamma}_2 = 0$, $\dot{\gamma}_1 = \frac{\dot{\tau}}{G_1}$, поэтому $\dot{\gamma}_3 = VД - \frac{\dot{\tau}}{G_1}$.

При $\tau > \tau_s$ $\dot{\gamma}_2 = \frac{\tau - \tau_s}{\eta_1}$ и $\dot{\gamma}_3 = VД - \frac{\dot{\tau}}{G_1} - \frac{\tau - \tau_s}{\eta_1}$.

При $\tau \leq \tau_s$ $\ddot{\gamma}_3 = -\ddot{\gamma}_1 - \ddot{\gamma}_2$; $\ddot{\gamma}_3 = -\frac{\ddot{\tau}}{G_1}$.

При $\tau > \tau_s$ $\ddot{\gamma}_3 = -\frac{\ddot{\tau}}{G_1} - \frac{\dot{\tau}}{\eta_1}$;

$$\tau = \dot{\gamma}_3 G_2 + \eta_2 \dot{\gamma}_3.$$

Подставив в эти выражения приведенные выше значения для $\dot{\gamma}_3$ и $\ddot{\gamma}_3$, получим следующие дифференциальные уравнения:

$$\dot{\tau} = G_2 \left(VД - \frac{\dot{\tau}}{G_1} \right) - \frac{\eta_2 \ddot{\tau}}{G_1} \quad \text{при } \tau \leq \tau_s; \quad (4.21)$$

$$\dot{\tau} = G_2 \left(VД - \frac{\dot{\tau}}{G_1} - \frac{\tau - \tau_s}{\eta_1} \right) - \frac{\eta_2 \ddot{\tau}}{G_1} - \frac{\eta_2 \dot{\tau}}{\eta_1} \quad \text{при } \tau > \tau_s. \quad (4.22)$$

Найдем зависимость τ от времени при $\tau \leq \tau_0$. Преобразуем соответствующее уравнение

$$\ddot{\tau} + \dot{\tau} \left(\frac{G_1}{\eta_2} + \frac{G_2}{\eta_2} \right) = G_2 G_1 \frac{VД}{\eta_2}.$$

Очевидно следующее начальное условие: при $t=0$ $\tau=0$. Найдем значение $\dot{\tau}$ при $t=0$. Так как $\tau=0$, то $\gamma_3 G_2 + \eta_2 \dot{\gamma}_3 = 0$. При $t=0$ $\gamma_3=0$, поэтому, как следует из последнего выражения, $\dot{\gamma}_3=0$, $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_3 = \dot{\gamma}_1 = VД$. Значит, $\dot{\tau} = VД \cdot G_1$.

Решив это уравнение при данных начальных условиях, получаем формулу

$$\tau = \left[\frac{VD \cdot G_1 \eta_2}{G_1 + G_2} - \frac{VD \cdot G_2 G_1 \eta_2}{(G_1 + G_2)^2} \right] \left[1 - \exp\left(-\frac{(G_1 + G_2)t}{\eta_2}\right) \right] + \frac{VD \cdot G_2 G_1}{G_1 + G_2} t. \quad (4.23)$$

Как показали расчеты с использованием значений реологических характеристик алюминиевых сплавов, полученных Л.П. Каширцевым, величина $\frac{G_1 + G_2}{\eta_2} \ll 1$. Поэтому, разлагая экспоненту в ряд с точностью до второго члена, получаем

$$\exp\left(-\frac{(G_1 + G_2)t}{\eta_2}\right) \approx 1 - \frac{(G_1 + G_2)t}{\eta_2}.$$

С учетом этого выводим упрощенное выражение $\tau = VD \cdot G_1 \cdot t$, которое позволяет заключить, что деформацией упругого последствия в первом приближении можно пренебречь. Время, в течение которого напряжение достигает значения предельного напряжения сдвига τ_s , будет равно

$$t_0 = \frac{\tau_s}{G_1 \cdot VD}.$$

Решим уравнение для $\tau_s > 0$. Преобразуем его к виду

$$\ddot{\tau} + \dot{\tau} \left(\frac{G_1}{\eta_2} + \frac{G_2}{\eta_2} + \frac{G_1}{\eta_1} \right) + \frac{G_1 G_2}{\eta_1 \eta_2} \tau = VD \frac{G_1 G_2}{\eta_2} + \frac{G_1 G_2}{\eta_1 \eta_2} \tau_s. \quad (4.24)$$

Сформулируем начальные условия: при $t = t_0$ $\tau \approx \tau_s$, $\dot{\tau} = \dot{\tau} (t = t_0)$. Определим $\dot{\tau} (t = t_0)$. Так как при $t = t_0$ $\dot{\gamma}_2 = 0$, $\dot{\gamma}_3 = 0$ (пренебрегаем развитием упругого последствия при $t \leq t_0$), то $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_1 = VD$. Поэтому $\dot{\tau} (t = t_0) = VD \cdot G_1$.

Решая дифференциальное уравнение при данных начальных условиях, получаем

$$\tau = \frac{VD}{r_1 - r_2} \left[\left(\eta_1 + \frac{G_1}{r_2} \right) r_2 \cdot \exp(r_1(t - t_0)) - \left(\eta_1 + \frac{G_1}{r_1} \right) r_1 \cdot \exp(r_2(t - t_0)) \right] + VD \cdot \eta_1 + \tau_s.$$

$$\text{где } r_1 = \left(-\left(\frac{G_1}{\eta_2} + \frac{G_2}{\eta_2} + \frac{G_1}{\eta_1}\right) + \sqrt{\left(\frac{G_1}{\eta_2} + \frac{G_2}{\eta_2} + \frac{G_1}{\eta_1}\right)^2 - \frac{4G_1G_2}{\eta_1\eta_2}}\right) \cdot 0,5;$$

$$r_2 = \left(-\left(\frac{G_1}{\eta_2} + \frac{G_2}{\eta_2} + \frac{G_1}{\eta_1}\right) - \sqrt{\left(\frac{G_1}{\eta_2} + \frac{G_2}{\eta_2} + \frac{G_1}{\eta_1}\right)^2 - \frac{4G_1G_2}{\eta_1\eta_2}}\right) \cdot 0,5.$$

Так как $\left(\frac{G_1}{\eta_2} + \frac{G_2}{\eta_2} + \frac{G_1}{\eta_1}\right) \ll 1$, то, приняв $\exp(r_1(t-t_0)) \approx 1 + r_1(t-t_0)$ и $\exp(r_2(t-t_0)) \approx 1 + r_2(t-t_0)$, после преобразований получим

$$\tau = \tau_0 + G_1 \cdot VD(t-t_0).$$

Из этого выражения вытекает, что если $r_1(t-t_0) \ll 1$, то пластической деформацией и деформацией упругого последствия можно пренебречь по сравнению с упругой. Для того чтобы решить вопрос строго, необходимо из полученной точной формулы найти время, за которое напряжение τ достигнет предела прочности сплава τ_{np} , вычислить все виды деформаций, накопленные к этому моменту времени, и сравнить их. Подобные расчеты с применением численных методов на ЭВМ выполнены Л.П. Каширцевым для случая испытания образцов на растяжение из большого числа алюминиевых сплавов.

На рис. 4.35 приведены расчетные кривые изменения предельной деформационной способности сплава алюминия с 0,6 % Si в интервале его кристаллизации при скорости деформации $\dot{\epsilon} = 0,00015 \text{ с}^{-1}$.

Видно, что пластическая деформация ϵ_3 и деформация упругого последствия ϵ_2 более чем на порядок меньше упругой деформации ϵ_1 . Поэтому приближенно можно принять, что деформационную способность сплавов в интервале кристаллизации необходимо оценивать не по пластической, а по упругой деформации, т.е. $\epsilon_0 \approx \epsilon_1$. Фактическим подтверждением этого вывода является то, что разрушение сплава при образовании горячих трещин носит хрупкий характер.

Вывод о том, что пластическая деформация вблизи температуры солидуса мала, следует из полученной выше формулы Н.Н. Прохорова, из которой видно, что при температуре солидуса пластическая деформация равна нулю. Сравнение деформационной способности сплавов ϵ_0 с относительной свободной усадкой ϵ_y (см. рис. 4.35) показывает, что $\epsilon_y < \epsilon_0$. Поэтому величина $\Delta = \min \epsilon_0 - \max \epsilon_y$ всегда положительна. Отсюда можно сде-

лать вывод, что даже при полном затруднении горячие трещины не должны образовываться, что противоречит действительности. Следовательно, причины образования горячих трещин нужно искать в другом направлении.

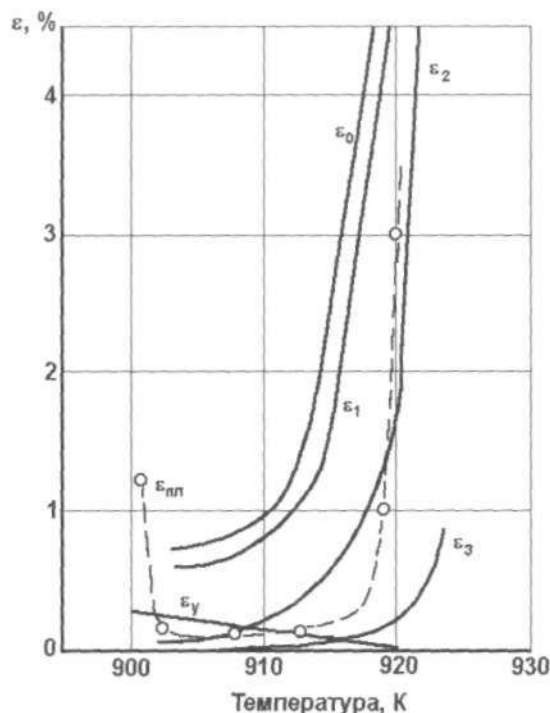


Рис. 4.35. Изменение деформационной способности сплава алюминия с 0,6 % Si (по данным Л.П. Каширцева): ε_1 – предельная упругая деформация; ε_2 – предельная деформация упругого последствия; ε_3 – предельная пластическая деформация; ε_0 – полная деформация; ε_{nn} – пластическая деформация растяжения

4.1.3. Механизм образования горячих трещин

Изложенная выше теория рассматривает сплав с однородным температурным полем в объеме отливки. Реологические характеристики во всех точках сплава одинаковы, поэтому весь объем испытывает однородно распределенные деформации. В реальной отливке скорость охлаждения ее от-

дельных элементов различна. Вследствие этого неоднородно развивается усадка и реологические свойства отдельных элементов отливки существенно отличаются. Поэтому в тех элементах отливки, которые затвердевают медленнее других, могут локализоваться усадочные процессы. Величина усадки ε_y при этом значительно возрастает и может превысить деформационную способность ε_0 , что приведет к образованию горячих трещин.

Поясним это на следующем примере. На рис. 4.36 приведена отливка, содержащая в середине утолщение, а также отливка, затвердевание центральной части которой замедлено применением металлической формы с малой теплопроводностью. Примем, что модули упругости E в утолщенной и теплоизолированной частях отливок значительно меньше, чем в остальных частях, так как модуль упругости существенно зависит от температуры (с увеличением температуры он уменьшается). При этом крайние участки отливки можно считать жесткими. В сечении, разделяющем центральную и периферийную части, действуют напряжения

$$\sigma_1 = E_1 \frac{\Delta l_1}{L_0 - l} \text{ и } \sigma_2 = E_2 \frac{\Delta l_2}{l}, \text{ где } \Delta l_1 \text{ — деформация периферийной части;}$$

Δl_2 — деформация центральной части. Очевидно, что исходя из усло-

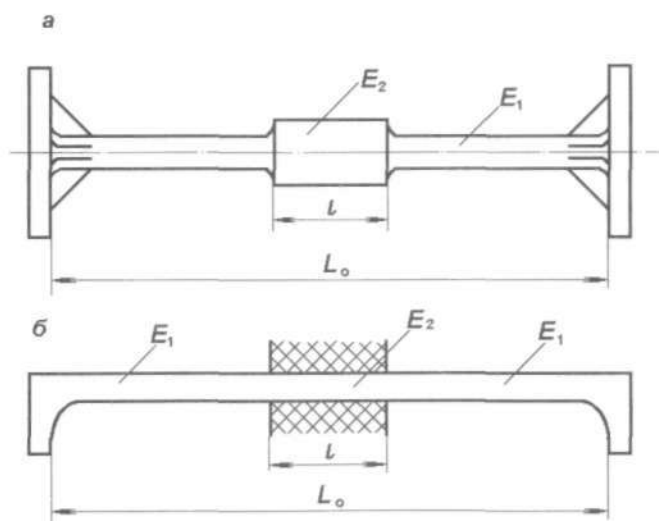


Рис. 4.36. Схема неоднородно затвердевающих отливок:
 а — отливка имеет местное утолщение; б — затвердевание центральной части отливки замедляется применением малотеплопроводного покрытия в металлической форме

вий равновесия $\sigma_1 = \sigma_2$, или $E_1 \frac{\Delta l_1}{L_0 - l} = E_2 \frac{\Delta l_2}{l}$. С другой стороны, сумма деформаций Δl_1 и Δl_2 должна быть равна свободной усадке всей отливки:

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = \alpha_{\text{св}} [(L_0 - l) \cdot (T_y - T_1) + l(T_y - T_2)],$$

где T_1 и T_2 — температура периферийных и центральной частей отливки ($T_2 > T_1$).

Решив совместно оба приведенных уравнения, получим следующее выражение для вычисления относительной усадки центральной части:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{св}2} &= \frac{\Delta l_2}{l} = \frac{E_1 \cdot \alpha_{\text{св}} [(T_y - T_1)(L_0 - l) + l(T_y - T_2)]}{E_1 l + E_2 (L_0 - l)} = \\ &= \frac{\alpha_{\text{св}} [(T_y - T_1)(L_0 - l) + l(T_y - T_2)]}{l + \frac{E_2 (L_0 - l)}{E_1}}. \end{aligned}$$

Очевидно, что при $E_1 = E_2$ и $T_2 = T_1$ $\varepsilon_{\text{св}2} = \alpha_{\text{св}} (T_y - T)$, т.е. в центральном элементе относительная усадка равна относительной усадке сплава. С

уменьшением отношения $\frac{E_2}{E_1}$ или с увеличением перепада температур между участками отливки $\varepsilon_{\text{св}2}$ возрастает и становится больше свободной усадки сплава. Так как модуль упругости по мере приближения к температуре солидуса резко увеличивается, примем $E_2 < E_1$. При этом

$$\varepsilon_{\text{св}2} = \alpha_{\text{св}} \left[\frac{L_0 - l}{l} \cdot (T_y - T_1) + T_y - T_2 \right] = \alpha_{\text{св}} \left[L_0 \frac{T_y - T_1}{l} - (T_2 - T_1) \right].$$

Из данного выражения видно, что, чем больше длина отливки L_0 при заданной длине термического узла l , тем больше усадка в этом узле превышает свободную усадку сплава $\varepsilon_{\text{св}}$. На этом основано применение пробы на горячеломкость сплавов А. Татюра (см. рис. 4.29, а). Очевидно, что, чем больше расстояние между утолщениями отливок пробы, тем больше $\varepsilon_{\text{св}}$ в них и выше вероятность образования горячих трещин.

В общем виде, как предложено Г.Ф. Баландиным, относительную усадку в отдельных частях отливки можно выразить формулой

$$\varepsilon = m \varepsilon_y,$$

где $m \geq 1$ – коэффициент, учитывающий неравномерность охлаждения частей отливки.

Горячие трещины возникают, когда при деформации $m \varepsilon_y$ упругие напряжения превысят предел прочности сплава, т.е. при $E m \varepsilon_y \geq \sigma_B$. Таким образом, горячие трещины образуются чаще всего в термических, толсто-стенных частях отливки. В данном случае не соблюдается известная истина: где тонко, там и рвется. Для определения коэффициента m необходимо решить тепловую задачу затвердевания сплава (и расчета температурного поля отливки), совмещенную с приведенными выше реологическими уравнениями для расчета деформации сплава и развивающихся напряжений. При этом необходимо использовать экспериментальные данные по реологическим характеристикам сплава в зависимости от температуры.

Предел прочности сплава σ_B является важнейшим реологическим свойством. С повышением температуры σ_B уменьшается.

На рис. 4.37 приведен график зависимости σ_B углеродистой стали от температуры. Видно, что увеличение температуры до 100 °С приводит к некоторому снижению σ_B с последующим его повышением при значениях

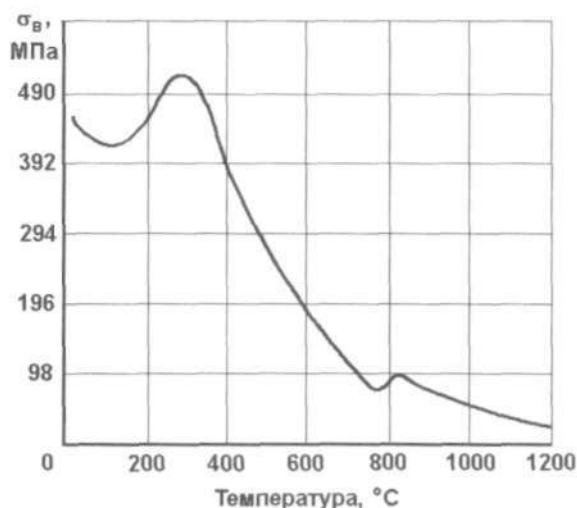


Рис. 4.37. Зависимость предела прочности углеродистой стали от температуры

температуры примерно до 300 °С. Дальнейшее увеличение температуры приводит к резкому уменьшению σ_B . Зону около 300 °С называют зоной синеломкости. При повышении температуры стали до 1100 °С ее прочность уменьшается почти в 10 раз. Систематические и надежные данные по прочности стали в интервале кристаллизации в литературе отсутствуют. По данным Г.Ф. Баландина, прочность σ_B алюминиевых сплавов в интервале кристаллизации изменяется в пределах 0,5–1,0 МПа.

Математическая модель образования горячих трещин для отливок простейших конфигураций при некоторых допущениях получена Л.П. Каширцевым. Рассмотрение этой модели и ее реализацию на ЭВМ целесообразно осуществить на одном из практических занятий по курсу.

На основании изложенных выше теоретических положений рассмотрим важнейшие мероприятия по предотвращению образования горячих трещин в отливках.

4.1.4. Мероприятия по борьбе с образованием горячих трещин в отливках

Все мероприятия могут быть классифицированы по следующим направлениям: конструирование технологичных отливок, управление тепловым режимом их затвердевания, повышение податливости форм и стержней, повышение жесткости термических узлов отливки, повышение предела прочности сплавов и оптимизация их реологических свойств.

Очевидно, что идеальным было бы конструировать отливки с минимальными перепадами толщин стенок, без термических узлов, исключая затруднение усадки. Однако решение максимальной задачи нереально. Из изложенной выше теории следует, что нет необходимости устранять термические узлы и торможение усадки. Последнее вообще исключило бы применение металлических форм и стержней.

Целесообразно при конструировании отливок размещать термические узлы на расстояниях L друг от друга, не превышающих некоторых максимально допустимых значений $L_{доп}$. Величину $L_{доп}$ можно определить по технологическим пробам типа пробы А. Татюра. Если это невозможно из конструктивных соображений, то дополнительные тепловые узлы, предусмотренные с целью уменьшения L , можно удалять при последующей механической обработке.

В местах сочленения стенок необходимо предусматривать закругления – галтели. На рис. 4.38 приведена схема оформления сочленения стенок отливки. Без применения галтелей в месте сочленения часто образуются горячие трещины, так как здесь расположен термический узел и при

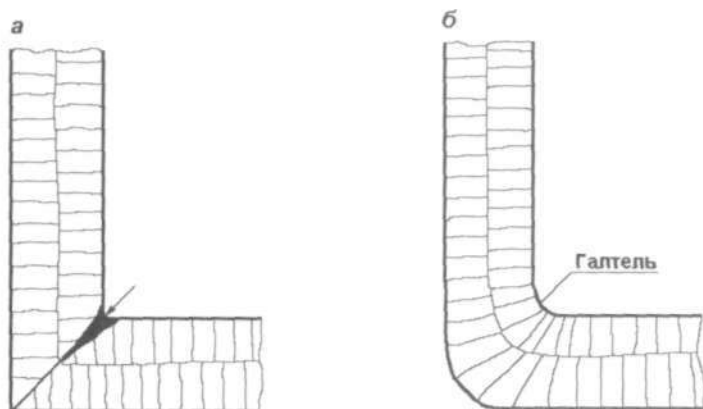


Рис. 4.38. Примеры оформления сочленения стенок отливок:
а – без галтели (образуется трещина, показанная стрелкой);
б – с применением галтели (трещина не образуется)

транскристаллизации в месте стыка столбчатых зон может образоваться плоскость слабину.

Более подробно рекомендации по конструированию отливок, а также вопросы улучшения податливости форм и стержней рассматриваются в технологических курсах.

Для управления охлаждением затвердевающих отливок применяются методы, рассмотренные в гл. 3 (внутренние и наружные холодильники, смеси различной теплоаккумулирующей способности и т. п.).

Влияние различных способов управления охлаждением кристаллизующейся отливки на прочность стальных образцов с разными термическими узлами показано на рис. 4.39.

На образование горячих трещин оказывают влияние способ подвода сплава, продолжительность и температура его заливки. Очевидно, что сосредоточенный подвод сплава в термические узлы будет способствовать образованию горячих трещин. Вероятность их появления возрастает с повышением температуры заливки и увеличением ее продолжительности. Поэтому подвод сплава целесообразно осуществлять к тонкостенным частям отливки. При этом чем выше температура заливки и медленнее она осуществляется, тем сильнее прогревается форма, меньше перепад температур и вероятность образования трещин. Если отливка имеет равномерную толщину стенки, подвод сплава необходимо осуществлять через несколько распределенных по ее длине питателей. В отливках простой кон-

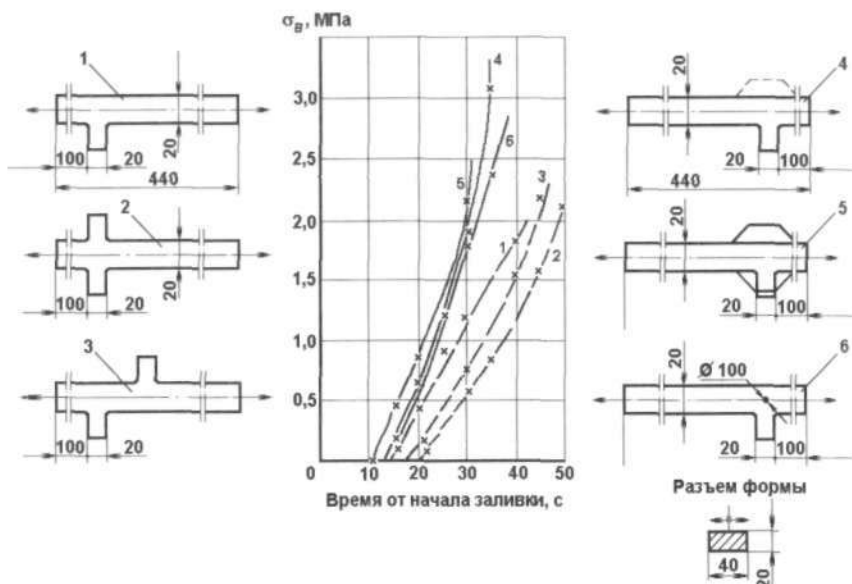


Рис. 4.39. Влияние расположения термических узлов и холодильников на изменение предела прочности стальных образцов:

1, 2, 3 – различное расположение термических узлов в отливке; 4, 5 – применение наружных холодильников; 6 – применение внутреннего холодильника

фигурации, склонных к образованию усадочных раковин, подвод сплава целесообразно осуществлять под прибыль, в толстостенную часть.

Действенным средством предотвращения образования горячих трещин является выполнение на термических узлах тонкостенных усадочных ребер. Ребра, затвердевая раньше узла, как бы армируют его и благодаря большей прочности препятствуют образованию трещин (рис. 4.40). Размеры ребер выбирают по эмпирическим таблицам в зависимости от толщины основной стенки отливки δ_o . В первом приближении толщину ребра δ_p можно принять равной $\delta_o/3$.

На образование горячих трещин оказывает влияние характер затвердевания сплава. При последовательном затвердевании образующаяся твердая корка увеличивает сопротивляемость разрушению. Поэтому последовательно затвердевающие сплавы менее склонны к образованию горячих трещин, чем объемно затвердевающие. Возникновению трещин способствуют ликвационные процессы, выделение хрупких интерметаллидов и неметаллических включений. Прочность сплавов в интервале кристаллизации существенно зависит от их химического состава (рис. 4.41, 4.42). Так, повышение содержания серы даже на сотые доли процента резко снижает

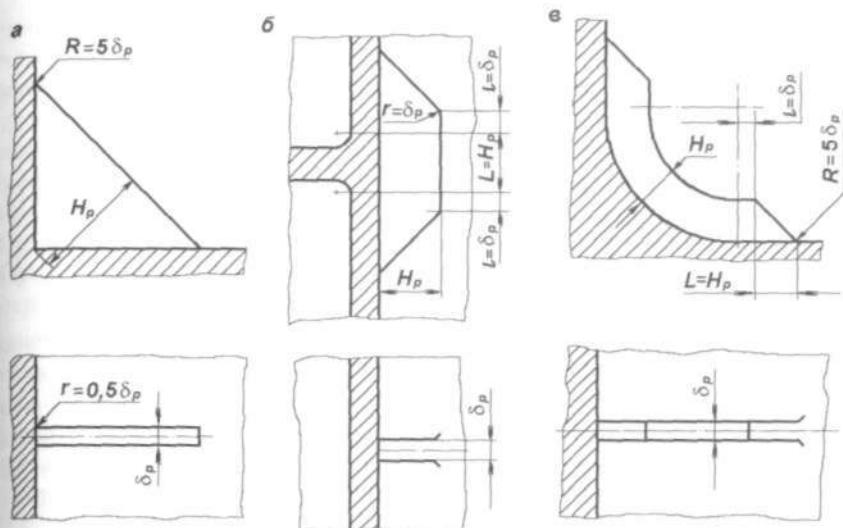


Рис. 4.40. Способы установки усадочных ребер в отливках:
а – угловое оформление; б – продольное; в – закругленное

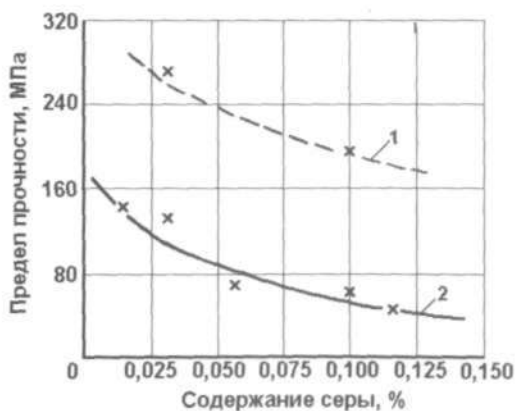


Рис. 4.41. Влияние содержания серы на предел прочности углеродистой стали вблизи температуры солидуса:
1 – при 1430 °C; 2 – при 1460 °C

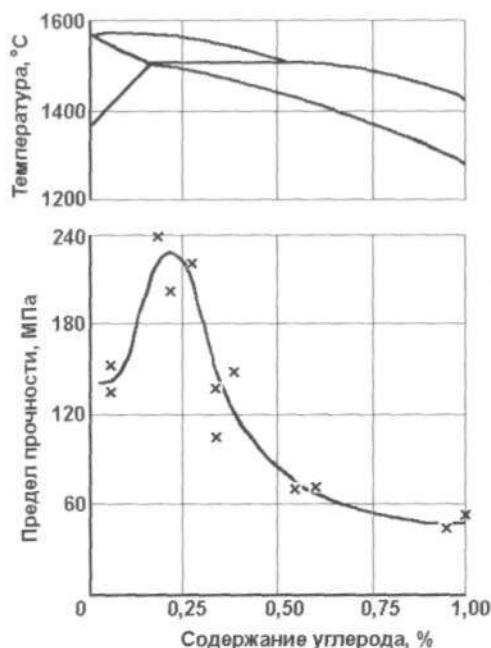


Рис. 4.42. Влияние содержания углерода на предел прочности углеродистой стали вблизи температуры солидуса

прочность стали. Пониженной прочностью, а значит, и склонностью к образованию горячих трещин обладают как низкоуглеродистые (0,2 % C), так и высокоуглеродистые стали.

Вопросы горячеломкости различных сплавов и методы воздействия на нее рассматриваются в технологических курсах.

4.2. Литейные напряжения в отливках

После затвердевания отливки осуществляется ее охлаждение в форме, сопровождающееся фазовыми превращениями (например, превращением $\gamma \rightarrow \alpha$ в железоуглеродистых сплавах, выделением избыточных фаз по линиям переменной растворимости в алюминиевых, магниевых и других сплавах) и дальнейшим развитием линейной усадки. Развитие линейной усадки и фазовые превращения в твердом состоянии приводят к формированию напряжений в отливке. Причиной напряжений является торможение линейной усадки и объемных изменений при фазовых превращениях.

Различают механическое и термическое торможение усадки. Механическое торможение усадки осуществляется стержнями и выступающими частями формы (см. рис. 4.28). Возникающие при этом напряжения называют усадочными. Механическая картина формирования напряжений и деформаций аналогична вышеописанной и принципиально может быть выражена рассмотренными уравнениями. Однако температурный интервал здесь гораздо шире интервала образования горячих трещин и охватывает охлаждение отливки от температуры солидуса до комнатной температуры. При этом реологические свойства сплава изменяются в широких пределах. Прежде всего, начиная с температуры солидуса, резко увеличивается пластичность сплава, которая при дальнейшем снижении температуры уменьшается. Деформация сплава γ является суммой упругой и пластической составляющих, а также деформации упругого последействия. Вблизи температуры солидуса превалирует пластическая деформация и деформация упругого последействия. По мере понижения температуры увеличивается влияние упругой деформации, которая является определяющей при низких температурах.

Известно, что пластическая деформация сопровождается деформационным упрочнением, т.е. приводит к возникновению напряжений. Обычно эти напряжения так же, как в законе Гука, считают пропорциональными относительной деформации при значительно меньших значениях коэффициента пропорциональности по сравнению с модулем упругости. При приближенном анализе формирования напряжений, начиная с основополагающих работ русского металлурга Н.В. Калакуцкого, весь температурный интервал разбивают на два участка: высокотемпературный, в котором сплав проявляет только пластические свойства, и низкотемпературный, в котором сплав представляет собой чисто упругое тело. При этом в пластической области отсутствует деформационное упрочнение, т.е. при деформации не возникает никаких напряжений.

Разделяющую указанные участки температуру перехода из пластической зоны в упругую T_n принимают равной $0,4+0,5T_c$. По предложению Н.Г. Гиршовича для чугуна и стали принимают $T_n=400+500$ °С. Очевидно, что такое представление является идеализированным, так как в зависимости от деформации и напряжений во всем интервале температур сосуществуют как пластические, так и упругие деформации. Однако, несмотря на это, указанное представление позволяет получить достоверные данные о формировании напряжений как на качественном, так и на количественном уровне. Строгое рассмотрение данного вопроса в настоящее время принципиально возможно, но сдерживается отсутствием систематических данных о реологических свойствах сплавов во всем интересующем нас температурном интервале.

4.2.1. Усадочные напряжения в отливках

Вследствие механического торможения усадки стержнями или выступающими частями формы в отливке возникают растягивающие деформации, равные, как было показано выше, $\varepsilon = \varepsilon_{yc} - \varepsilon_n + \varepsilon_p$. При этом до температуры $T = T_n$ деформации носят пластический характер и напряжения не возникают. При $T < T_n$ деформации носят упругий характер, что приводит к формированию упругих растягивающих напряжений:

$$\sigma = E[\alpha(T) - \alpha(T_n)] = E\alpha_{ce}[(T_c - T) - (T_c - T_n)] = E\alpha_{ce}(T_n - T).$$

Отметим, что данное выражение справедливо при $\varepsilon_n = 0$ и $\varepsilon_p = 0$, т.е. для полностью неподатливой и не расширяющейся формы или стержня. Если все стенки отливки охлаждаются с одинаковой скоростью и в момент выбивки имеют одинаковую температуру, то усадочные напряжения будут иметь временный, обратимый характер. При выбивке отливки из формы и удалении стержней, т.е. при устранении нагрузки, они полностью снимаются. Однако если в момент выбивки температура отдельных узлов отливки различна, то после выбивки в ней возникают остаточные напряжения.

Пусть конструкция отливки содержит тонкую и толстую стенки, жестко связанные друг с другом. Если в момент выбивки температура тонкой части T_1 будет меньше температуры толстой части T_2 , то упругие напряжения растяжения в них будут разные. В тонкой части напряжение равно $\sigma_1 = \alpha_{ce}(T_n - T_1)$, а в толстой – $\sigma_2 = \alpha_{ce}E(T_n - T_2)$. Так как $T_1 < T_2$, то $\sigma_1 > \sigma_2$. После выбивки отливка сократится на величину $l\alpha_{ce}(T_n - T_2)$, т.е. в толстой части деформация исчезнет. В тонкой же части останется относительная деформация $\alpha_{ce}(T_2 - T_1)$, поскольку ее снятие связано со сжатием толстой части. Так как тонкая часть стремится к сокращению, в отливке сохранятся остаточные напряжения. При этом в тонкой части будут растягивающие, а в толстой – сжимающие напряжения. Деформация в тонкой части несколько уменьшится, а в толстой части появится сжимающая деформация, равная этому уменьшению, т.е. $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \alpha_{ce}(T_2 - T_1)$, где ε_1 и ε_2 – относительные деформации в тонкой и толстой частях. Исходя из условий равновесия, можно записать уравнение $E\varepsilon_1 S_1 = E\varepsilon_2 S_2$, где S_1 и S_2 – площади сечений тонкой и толстой стенок отливки. Из этого уравнения получаем выражения для вычисления остаточных напряжений в стенках:

$$\sigma_1 = \frac{E\alpha_{ce}(T_2 - T_1) \cdot S_2}{S_1 + S_2}; \quad \sigma_2 = \frac{E\alpha_{ce}(T_2 - T_1) \cdot S_1}{S_1 + S_2}.$$

Очевидно, что величина напряжений тем больше, чем больше разность температур узлов отливки в момент выбивки.

Это необходимо учитывать, определяя момент выбивки. Данный вопрос нельзя решить однозначно. С точки зрения уменьшения усадочных напряжений целесообразно применять раннюю выбивку. Если выбить отливку из формы и удалить стержни в момент, пока тонкостенные части не перешли в упругое состояние, то усадочные напряжения не возникнут. Однако вследствие более быстрого охлаждения отливки на воздухе в ней могут возникнуть термические напряжения, вызванные термическим торможением усадки. Поэтому отливки, склонные к образованию значительных термических напряжений, после ранней выбивки помещают в печь и охлаждают вместе с ней.

4.2.2. Термические напряжения в отливках

Термическое торможение усадки возникает вследствие неравномерного ее развития в различных элементах отливки. Рассмотрим тонкостенный и толстостенный стержни, жестко связанные друг с другом (рис. 4.43). В начальный момент времени оба стержня имеют температуру $T_0 > T_n$. Конструкция охлаждается до достижения обоими стержнями одинаковой температуры T_n . Очевидно, что тонкостенный элемент будет остывать быстрее, чем толстостенный. Соответственно быстрее будет развиваться и его усадка. На рис. 4.44 приведены кривые изменения температуры и длины обоих стержней.

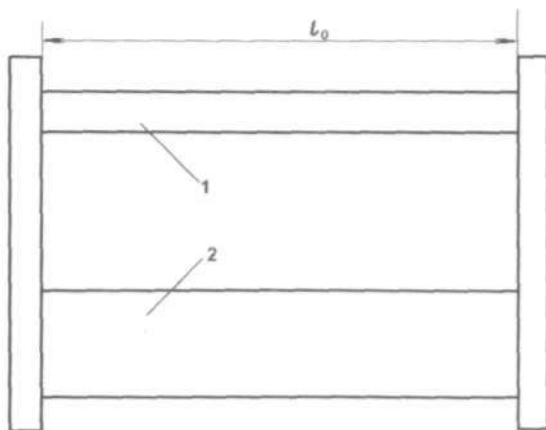


Рис. 4.43. Конструкция отливки, содержащей тонкостенный (1) и толстостенный (2) элементы

Если бы стержни не были связаны друг с другом, то их длины уменьшались бы в строгом соответствии с температурными кривыми: $l_1 = l_1[1 - \alpha_{св}(T_0 - T_1(t))]$ и $l_2 = l_0[1 - \alpha_{св}(T_0 - T_2(t))]$. Однако так как стержни связаны друг с другом, то в каждый момент они имеют одинаковую длину, изменение которой характеризует штриховая линия на рис. 4.44. Рассмотрим сначала качественную картину формирования напряжений, а затем дадим количественную оценку. В момент времени t_1 из пластического в упругое состояние переходит тонкий стержень; толстый стержень достигает

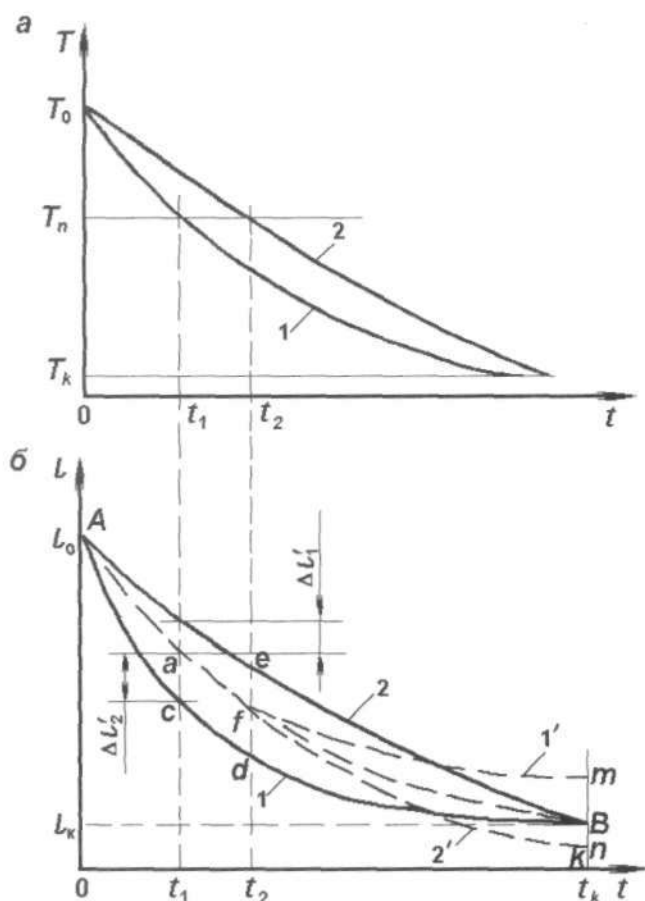


Рис. 4.44. Изменение температуры (а) и длины (б) элементов отливки во времени:

1 – тонкостенный элемент; 2 – толстостенный элемент

температуры T_n в момент t_2 . Рассмотрим поведение системы в следующие моменты времени: $(0+t_1)$, (t_1+t_2) , (t_2+t_k) .

При $t < t_1$ оба стержня находятся в пластическом состоянии. При этом тонкий стержень пластически растянут, а толстый стержень сжат. В момент t_1 деформации равны Δl_1 и Δl_2 . Напряжения в системе отсутствуют. При $t_1 < t < t_2$ тонкий стержень находится в упругом состоянии, а толстый – в пластическом.

Так как тонкий стержень деформируется упруго, в этом временном интервале кривая изменения длины отливки параллельна кривой изменения длины тонкого стержня, если бы он охлаждался отдельно от толстого, т.е. $af \parallel cd$ и $ac = fd$ (напряжения в системе отсутствуют).

В момент $t = t_2$ толстый стержень переходит в упругое состояние. При этом тонкий стержень упруго растянут на величину отрезка fd , а толстый – пластически сжат на величину ef . В дальнейшем оба стержня будут вести себя как упругие тела. Поэтому если при $t = t_2$ стержни разъединить, то изменение их длины будет развиваться по кривым, параллельным соответствующим кривым изменения длины несвязанных стержней. Длина первого стержня изменяется по кривой $fm \parallel dB$, а второго – по кривой $fn \parallel eB$.

При достижении температуры T_k при $t = t_k$ разделенные стержни имели бы длины, соответственно равные отрезкам km и kn . Фактическая же длина связанных стержней в этот момент равна kB . Очевидно, что после полного охлаждения отливки и выравнивания температур составляющих ее стержней толстый стержень будет растянут на величину отрезка nB , а тонкий сжат на величину отрезка Bm , причем $Bm = fd$ и $nB = ef$, т.е. остаточные деформации равны по величине и обратны по знаку деформациям, которые имели стержни в момент перехода толстого стержня из пластического состояния в упругое. Таким образом, в тонких элементах будут развиваться остаточные напряжения сжатия, а в толстых – растяжения. В данном случае природа как бы «сжалась» над чугунолитейщиками. Известно, что чугун имеет достаточно высокую прочность на сжатие и низкую прочность при растяжении. Если бы характер остаточных напряжений был противоположным, то качественные чугунные отливки получить было бы невозможно.

С целью упрощения количественного анализа процесса примем, что стержни остывают в условиях конвективной теплопередачи. Напишем уравнение теплового баланса стержня. За время dt от стержня в форму будет отведено количество тепла, равное $dQ = aF(T - T_\phi)dt$. При этом температура стержня уменьшится на dT и его теплосодержание изменится на $dH = CpVdT$, где V –

объем стержня. Так как $dH = dQ$, $C\rho VdT = -aF(T - T_k)dt$. Интегрируя это уравнение при начальном условии ($t=0$, $T=T_0$), получаем формулу, характеризующую изменение температуры стержня:

$$T = T_k + (T_0 - T_k) \cdot \exp\left(-\frac{\alpha t}{C\rho R}\right),$$

где $R = \frac{V}{F}$ – приведенная толщина стенки стержня.

Таким образом, температура стержней изменяется по следующим законам:

$$T_1 = T_k + (T_0 - T_k) \cdot \exp\left(-\frac{\alpha t}{C\rho R_1}\right);$$

$$T_2 = T_k + (T_0 - T_k) \cdot \exp\left(-\frac{\alpha t}{C\rho R_2}\right).$$

Если бы стержни охлаждались отдельно, то их **длины изменялись бы** в соответствии с уравнениями

$$l_1 = l_0(1 - \alpha_{cs}(T_0 - T_1)) = l_0[1 - \alpha_{cs}(T_0 - T_k)(1 - \exp(-\frac{\alpha t}{C\rho R_1}))];$$

$$l_2 = l_0[1 - \alpha_{cs}(T_0 - T_k)(1 - \exp(-\frac{\alpha t}{C\rho R_2}))].$$

Найдем разность длин стержней:

$$\Delta l = l_2 - l_1 = l_0 \alpha_{cs} (T_0 - T_k) [\exp(-\frac{\alpha t}{C\rho R_2}) - \exp(-\frac{\alpha t}{C\rho R_1})].$$

В первом приближении можно принять $\alpha = \frac{\lambda}{R}$, где λ – коэффициент теплопроводности сплава. В момент t_2

$$\Delta l_2 = l_0 \alpha_{cs} (T_0 - T_k) [\exp(-\frac{\lambda t_2}{C\rho R_2^2}) - \exp(-\frac{\lambda t_2}{C\rho R_1^2})].$$

Как видно на рис. 4.44, $nm = nB + Bm = \Delta l_2$, т.е.

$$nm = l_0 \alpha_{св} (T_0 - T_{\kappa}) \left[\exp\left(-\frac{\lambda_2}{C\rho R_2^2}\right) - \exp\left(-\frac{\lambda_2}{C\rho R_1^2}\right) \right].$$

Суммарная относительная деформация остывшей до T_{κ} отливки равна

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \alpha_{св} (T_0 - T_{\kappa}) \left[\exp\left(-\frac{\lambda_2}{C\rho R_2^2}\right) - \exp\left(-\frac{\lambda_2}{C\rho R_1^2}\right) \right].$$

Исходя из равновесия стержней, получаем $E\varepsilon_1 S_1 = E\varepsilon_2 S_2$, где ε и S — соответственно относительные деформации и площади поперечного сечения стержней. Решая вместе эти два уравнения, находим

$$\sigma_1 = - \frac{E\alpha_{св} (T_0 - T_{\kappa}) \left[\exp\left(-\frac{\lambda_2}{C\rho R_2^2}\right) - \exp\left(-\frac{\lambda_2}{C\rho R_1^2}\right) \right] S_2}{S_1 + S_2}; \quad (4.25)$$

$$\sigma_2 = \frac{E\alpha_{св} (T_0 - T_{\kappa}) \left[\exp\left(-\frac{\lambda_2}{R_2^2}\right) - \exp\left(-\frac{\lambda_2}{R_1^2}\right) \right] S_1}{S_1 + S_2}. \quad (4.26)$$

Приняв в приведенной выше формуле для вычисления T_2 $t=t_2$ и решив полученное уравнение относительно t_2 , выведем формулу для расчета времени перехода толстого стержня в упругое состояние

$$t_2 = \frac{R_2^2}{a} \cdot \ln \frac{T_0 - T_{\kappa}}{T_n - T_{\kappa}},$$

где $a = \frac{\lambda}{c\rho}$.

Подставив это выражение в формулы для вычисления напряжений, после преобразований получим

$$\sigma_1 = - \frac{E\alpha_{ce}(T_n - T_k) \left[1 - \left(\frac{T_n - T_k}{T_0 - T_k} \right)^{(R_2/R_1)^2 - 1} \right] \cdot S_2}{S_1 + S_2}; \quad (4.27)$$

$$\sigma_2 = - \frac{E\alpha_{ce}(T_n - T_k) \left[1 - \left(\frac{T_n - T_k}{T_0 - T_k} \right)^{(R_2/R_1)^2 - 1} \right] \cdot S_1}{S_1 + S_2}. \quad (4.28)$$

В реальных условиях, как было сказано выше, упругие и пластические деформации сосуществуют во всем температурном интервале. В процессе охлаждения происходит уменьшение доли пластической и увеличение доли упругой деформации, что должно приводить к более низким значениям напряжений, чем те, которые прогнозируют приведенные выше формулы. Для учета этого Н.Г. Гиршович предложил ввести в формулы поправочный коэффициент $K_1 = \frac{R_1}{R_2(1 - \lg \frac{R_2}{R_1})}$. Обычно его значение на-

ходится в пределах 0,4+1,0.

Более строгое построение теории применительно к данной задаче возможно с использованием численных методов расчета кинетики охлаждения отливки. Численный расчет термических напряжений целесообразно рассмотреть на одном из практических занятий.

Изложенная выше теория позволяет рекомендовать следующие мероприятия по снижению термических напряжений.

Очевидно, что все способы воздействия на сплав, вызывающие уменьшение коэффициента α_{ce} и модуля упругости, приводят к уменьшению уровня напряжений. Аналогично влияет снижение температуры T_n . В определенных пределах уменьшить α_{ce} , E и T_n можно, оптимизируя химический состав сплава. Однако комплексные мероприятия по управлению указанными характеристиками сплавов можно разработать только после накопления системных данных о реологических свойствах сплавов в широких интервалах температур. Более высокая склонность стали к образованию трещин по сравнению с чугуном объясняется тем, что сталь имеет не только большую линейную усадку, но и в 2–4 раза больший модуль упругости, чем чугун.

Увеличение температуры и продолжительности заливки при подводе сплава к тонким элементам отливки приводит к выравниванию скоростей охлаждения тонкостенных и толстостенных узлов, уменьшению перепада

температур и снижению уровня напряжений. При повышении скорости охлаждения отливок возрастает перепад температур между элементами отливки в момент t_2 и увеличиваются напряжения. Поэтому при кокильном литье вероятность образования трещин больше, чем при литье в песчаные формы.

При конструировании отливок нужно стремиться к уменьшению перепада толщин стенок. Для иллюстрации влияния конструкции отливок на характер напряженного состояния рассмотрим зубчатое колесо со спицами.

При тонком ободе и толстых спицах (рис. 4.45, а) в ободе будут развиваться сжимающие напряжения, а в спицах – растягивающие. При этом растягивающие термические напряжения в спицах складываются с такими же по знаку усадочными напряжениями, вызванными торможением усадки формой. В результате спица будет стремиться к сокращению, что приведет к местному втягиванию обода или отрыву спицы от обода, т.е. к браку.

В зубчатом колесе с толстым ободом и тонкими спицами (рис. 4.45, б) в ободе возникают растягивающие напряжения, а в спицах – сжимающие.

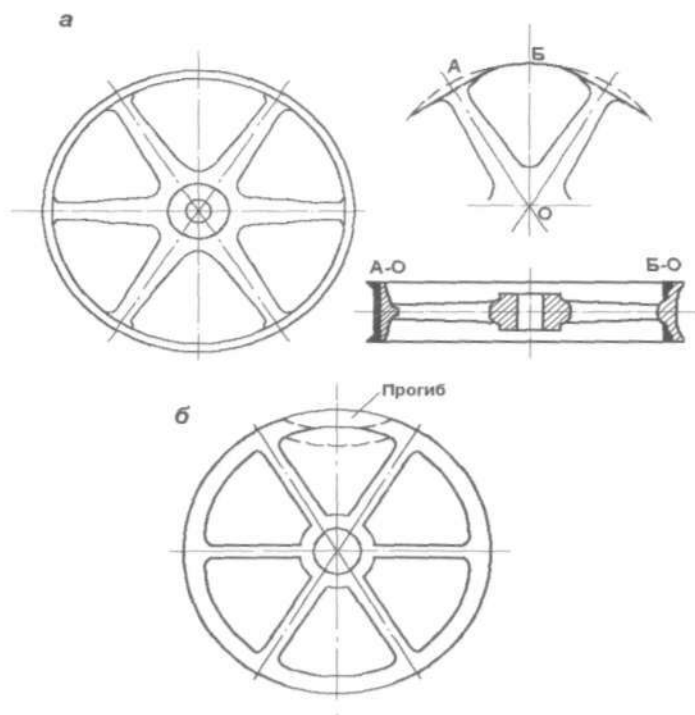


Рис. 4.45. Характер деформации зубчатого колеса с различными соотношениями толщин обода и спиц:
а – тонкий обод и толстые спицы; б – толстый обод и тонкие спицы

Сжимающие напряжения в спицах частично компенсируются растягивающими усадочными напряжениями. Растягивающие напряжения обода, наоборот, усиливаются усадочными напряжениями. В результате обод будет стремиться сократить свои размеры, что приведет к прогибу его между спицами.

Для получения качественного зубчатого колеса, соотношение толщин обода, спиц и ступицы должно находиться в определенных пределах. Отливки колесного типа являются примером отливок, склонных к образованию значительных внутренних напряжений.

Существенное влияние на термические напряжения оказывает длительность выдержки отливки в форме. Ранняя выбивка отливки при более высокой ее температуре приводит к увеличению скорости охлаждения и к росту внутренних напряжений. Для предотвращения образования трещин и коробления отливки нужно выбивать из формы при температурах, не превышающих T_n . Так, для стальных и чугунных отливок рекомендуют температуру при выбивке 500–550 °С. При этом термические напряжения не увеличиваются, а усадочные напряжения снимаются вследствие извлечения отливки из формы. Продолжительность выдержки отливок в форме определяют по номограммам и графикам, один из примеров которых приведен на рис. 4.46.

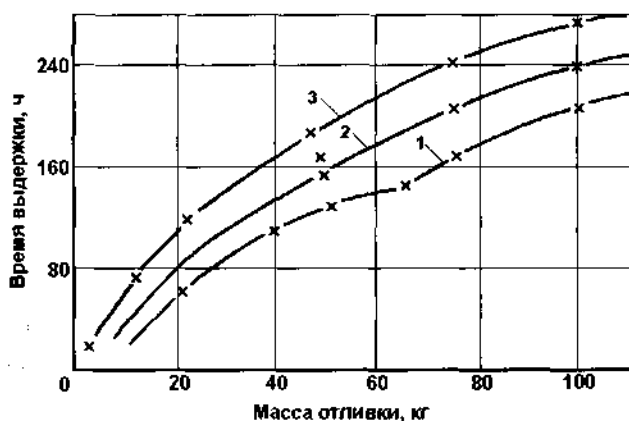


Рис. 4.46. Диаграмма для определения продолжительности выдержки отливок из углеродистой стали в песчаных формах:

1 — толщина стенок отливки 40–80 мм; 2 — 80–250 мм; 3 — свыше 250 мм

Для снижения напряжений целесообразно тонкие и толстые части отливок в форме оформлять из материалов с разными коэффициентами ак-

кумуляции тепла. Коэффициент аккумуляции тепла формы в местах тонкостенных элементов b_m должен быть меньше, чем на участках оформления толстостенных частей. В этом случае формулы для вычисления напряжений будут отличаться от (4.27) и (4.28). Предлагаем читателю вывести их самостоятельно.

Термические напряжения возникают не только в отливках, имеющих элементы разной толщины, но и в толстостенных отливках при резко неравномерном распределении температур по их сечению (рис. 4.47). В медленно остывающих центральных частях отливки образуются растягивающие напряжения, а в поверхностных слоях – сжимающие. Величина этих напряжений, особенно при низкой теплопроводности сплава, может быть очень большой. Например, невозможно получить качественные отливки из кислотоупорной кремнистой стали (12–15 % Si) при толщине стенки более 40 мм без принятия специальных мер по уменьшению скорости охлаждения.

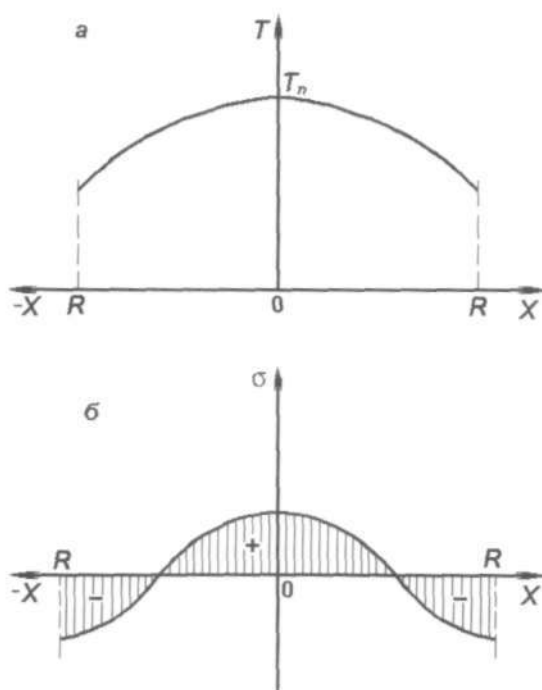


Рис. 4.47. Распределение температур (а) и напряжений (б) в массивной цилиндрической отливке

4.2.3. Фазовые напряжения в отливках

Рассмотрим процессы, приводящие к фазовым напряжениям в отливках. Если фазовые превращения в твердом состоянии, сопровождающиеся изменением объема фаз, происходят при $T > T_m$, то имеют место только связанные с этим пластические деформации, не приводящие к возникновению напряжений. Однако если фазовые превращения происходят при $T < T_m$, то деформации носят упругий характер и в отливках могут возникать фазовые напряжения. При литье железоуглеродистых сплавов фазовые напряжения связаны с переходом $\gamma \rightarrow \alpha$, сопровождающимся увеличением объема. Главная причина возникающих фазовых напряжений – не одновременное протекание фазовых превращений по сечению отливки.

Фазовые напряжения, суммируясь с рассмотренными выше термическими напряжениями, могут приводить к различным эпюрам напряжений в отливках как в процессе охлаждения, так и в конечном состоянии. Так, по данным Ю.А. Нехендзи, в кокильных отливках толщиной 40 мм из низколегированной хромистой стали в наружных слоях имеют место растягивающие напряжения, а в массивных кокильных отливках с толщиной стенки более 100 мм – сжимающие. Это говорит о том, что в первом случае доминируют фазовые превращения, происходящие вследствие разновременности протекания превращения $\alpha \rightarrow \gamma$ по сечению отливки, а во втором случае превалируют термические напряжения.

Таким образом, формирующиеся в отливках литейные напряжения являются результатом взаимодействия всех трех видов напряжений (усадочных, термических и фазовых), т.е. $\sigma_d = \sigma_y + \sigma_m + \sigma_\phi$.

В зависимости от сплава и конкретных технологических условий может преобладать тот или иной из рассмотренных видов напряжений.

4.2.4. Пороки отливок, вызываемые литейными напряжениями

Литейные напряжения могут приводить к короблению отливок или к образованию в них холодных трещин. При симметричных условиях охлаждения в отливке формируется симметричная эпюра напряжений (рис. 4.48, б), при которой изгибающий момент, возникающий вследствие напряженного состояния продольных волокон, в силу четности функции

равен нулю: $M = a \int_{-b/2}^{b/2} x \cdot \sigma_x \cdot dx$, поэтому коробления отливки не произой-

дет. При несимметричной эпюре напряжений (рис. 4.48, в) изгибающий

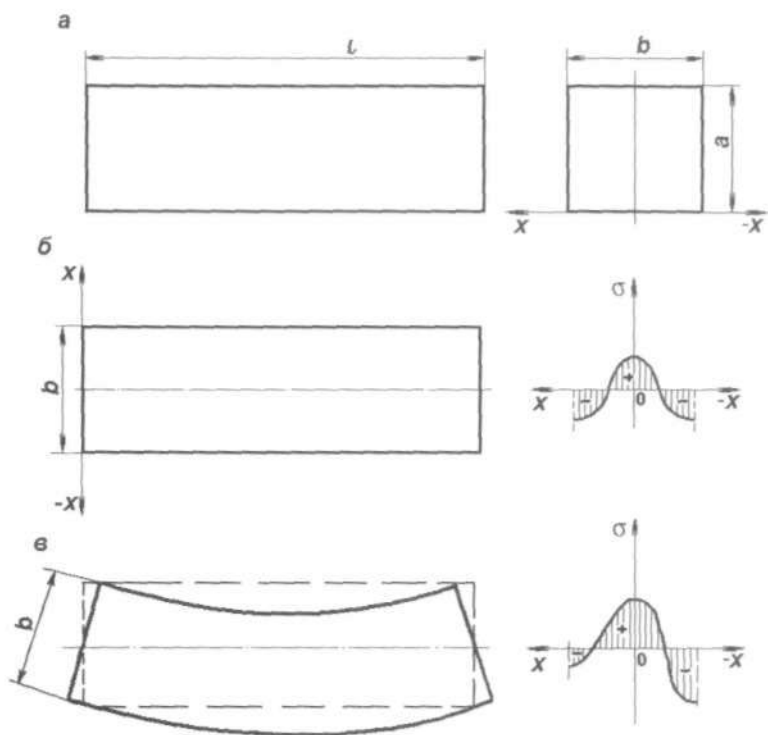


Рис. 4.48. Деформация плоской отливки (а) при симметричной (б) и несимметричной (в) эпюрах напряжений

момент не равен нулю и является положительным, что приведет к прогибу отливки, т.е. к ее короблению. При этом изгибающие напряжения в крайних вдоль оси x волокнах будут равны $\sigma_{\max} = \pm \frac{M}{W}$, где W – момент сопротивления сечения отливки.

После изгиба в волокнах отливки сохраняются напряжения, равные разности осевых σ и изгибающих σ' напряжений. Из курса сопротивления материалов известно, что изгибающие напряжения вдоль оси x распределены по прямой линии. Поэтому они полностью компенсируют при изгибе осевые литейные напряжения только при линейном распределении температур по толщине отливки. На практике чаще всего имеет место несимметричное и нелинейное распределение температур. Поэтому при ко-

роблении отливок внутренние напряжения хотя и уменьшаются, но полностью не исчезают.

При симметричном температурном поле коробление отливки отсутствует, но стоит только подвергнуть ее механической обработке, например профрезеровать верхнюю поверхность, как симметричность эпюры напряжений в оставшемся сечении будет нарушена и появится изгибающий момент, приводящий к короблению отливки (см. рис. 4.48, в). Этот факт говорит о том, что, не сняв внутренние напряжения в отливке, ее нельзя подвергать механической обработке, так как при этом невозможно обеспечить требуемую точность обработки.

Для иллюстрации рассмотрим коробление балки таврового сечения (рис. 4.49). Полка тавра имеет большую толщину, чем ребро. Поэтому в полке возникнут растягивающие напряжения, а в ребре – сжимающие. Значит, ребро будет стремиться удлиниться, а полка – сократиться. В результате ось балки искривится, как показано на рисунке. Иногда с целью получения неискривленной отливки на модели делают обратный прогиб, т.е. для рассмотренного выше случая выполняют выпуклую модель.

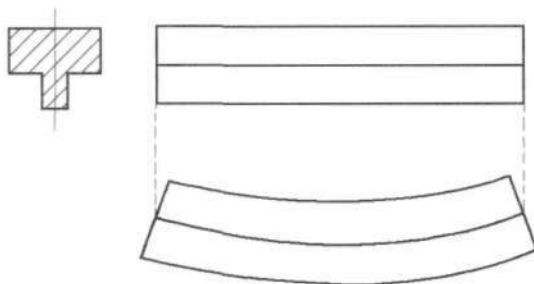


Рис. 4.49. Характер деформации литой балки таврового сечения

Если литейные напряжения превзойдут допустимую величину, то в отливке возникнут холодные трещины. По данным А.А. Тимофеева, предшествующие формированию напряжений пластические деформации способствуют возникновению деформационной пористости и микротрещин. Это приводит к снижению прочностных свойств сплава. Поэтому трещины образуются при напряжениях, меньших предела прочности, определенного по стандартной методике. Склонность сплава к образованию холодных трещин определяется его металлографической природой и рассматривается в технологических курсах. Например, даже сотые доли процента фосфора приводят к повышению хладноломкости сталей.

Холодные трещины отличаются от горячих прежде всего по характеру поверхности разрыва. Поверхность холодных трещин, как правило, не окисленная, в то время как поверхность горячих трещин всегда окислена и носит характер междендритного разрыва. Кроме того, горячая трещина после охлаждения отливки носит неупругий характер и при вырубке под заварку не распространяется по объему отливки. Холодная же трещина в своих вершинах является концентратором упругих напряжений. Поэтому при вырубке под заварку она может быстро распространиться по всему сечению и вдоль стенки отливки. Для того чтобы исключить это, стенку отливки у концов трещины засверливают.

4.2.5. Мероприятия по снятию литейных напряжений

Для снятия литейных напряжений отливки подвергают либо естественному старению, либо отжигу.

При естественном старении отливки выдерживают при обычных температурах в течение длительного периода времени (до года). При этом происходит релаксация напряжений. Напряженное состояние отливки является термодинамически неустойчивым. При выдержке в сплаве происходят пластические деформации, приводящие к уменьшению до минимума свободной энергии. Вследствие этого уровень напряжений снижается, хотя полностью они не исчезают.

Для снятия литейных напряжений при термообработке отливку нужно нагреть до температур, превышающих T_n , и выдержать до выравнивания температур по ее сечениям (см. рис. 4.43). При $T > T_n$ отливку следует медленно охлаждать с печью. При $T < T_n$ в упругой области охлаждение отливки можно вести быстро. Остаточные термические напряжения в ней уже не возникнут. Однако при этом необходимо учитывать воздействие временных термических напряжений, возникающих вследствие неравномерного охлаждения различных стенок и узлов отливки.

При нагреве для термообработки в отливке возникают временные термические напряжения того же знака, что и остаточные литейные напряжения (поверхностные слои или тонкостенные части отливки сжаты, а внутренние слои или толстостенные части растянуты). Эти напряжения складываются, и, чтобы не вызвать разрушения отливки, нагрев нужно вести достаточно медленно.

Режимы термообработки отливок рассматриваются в технологических разделах спецкурса.

4.2.6. Классификация внутренних напряжений

Выше мы рассмотрели так называемые зональные напряжения, или напряжения первого рода, уравнивающиеся в объеме отливки. Кроме них различают напряжения второго рода, или микроскопические напряжения, уравнивающиеся в объеме отдельных кристаллитов, и напряжения третьего рода, уравнивающиеся в одной или нескольких элементарных кристаллических решетках. Причины образования микроскопических напряжений, по существу, не отличаются от рассмотренных выше. Эти напряжения обусловлены местной неравномерностью температур, различным составом сплава в пределах зерна, т.е. внутрикристаллической ликвацией (концентрационные напряжения), наличием газовых и неметаллических включений. Они могут приводить к образованию микротрещин и флюкенов.

Субмикроскопические напряжения возникают вследствие искажений кристаллических решеток, имеющих место по границам зерен, или при образовании твердых растворов внедрения.

Для измерения напряжений в отливках применяют различные методы – от изготовления специальных проб до использования тензометров. Подробно эти методы должны быть рассмотрены на лабораторных занятиях.

Контрольные вопросы и задания

1. В чем состоит физическая природа усадки сплавов в жидком и твердом состояниях и при затвердевании?
2. Что такое относительная объемная усадка? Как она вычисляется в жидком и твердом состояниях? Каковы значения ε_v при затвердевании?
3. Что такое линейная и литейная усадка?
4. Чем объясняется предусадочное расширение сплавов?
5. Что такое свободная и затрудненная усадка?
6. От чего зависит преимущественная форма объемных дефектов (раковины или поры)?
7. Объясните механизм образования усадочной раковины.
8. Как происходило бы образование усадочных дефектов в космосе?
9. Каковы форма и расположение усадочной раковины?
10. В чем суть принципа направленного затвердевания?
11. Выведите формулу для вычисления относительного объема усадочной раковины.
12. Каковы способы обеспечения направленности затвердевания?
13. Постройте технологический напуск для организации питания отливки (рис. 4.50).

14. Рассчитайте массу внутреннего холодильника, устанавливаемого в термическом центре стальной отливки (см. рис. 4.50), чтобы исключить назначение технологического напуска.

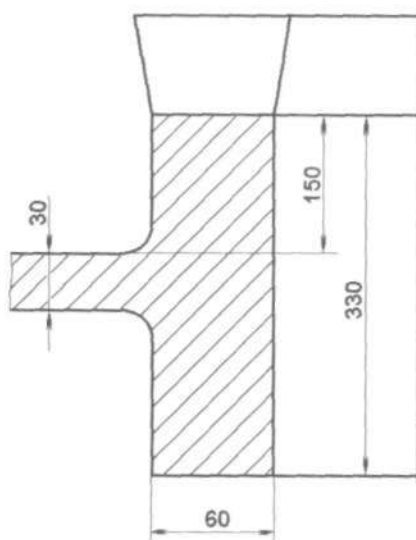


Рис. 4.50. Схема отливки

15. Сформулируйте принципы расчета прибылей.
16. Каковы методы повышения эффективности прибыли и увеличения выхода годного?
17. Поясните механизм образования усадочных пор и утяжин.
18. Напишите уравнение Дарси и уравнение неразрывности фильтрационного потока.
19. Каковы условия суспензионного питания отливок?
20. Как оценивают горячеломкость сплавов по методу Н.Н. Прохорова?
21. Что такое температурный интервал образования горячих трещин по теории А.А. Бочвара?
22. Опишите реологическую модель сплава в интервале кристаллизации, разработанную Л.П. Каширцевым.
23. Какая деформация является определяющей при образовании горячих трещин?
24. Каков механизм образования горячих трещин в отливках?
25. Опишите методы борьбы с горячими трещинами.
26. Каков механизм образования усадочных напряжений?
27. Каков механизм образования термических напряжений?

28. Каков механизм образования фазовых напряжений?

29. Опишите методы борьбы с холодными трещинами и короблением отливок.

30. Рассчитайте по формуле Й. Пржибыла объем и размеры прибыли для стальной отливки (см. рис. 4.50), приняв $\varepsilon_{V\Sigma}=0,065$ и $\beta=0,1$.

31. Рассчитайте величину напряжений в стержнях 1 и 2 отливки, приведенной на рис. 4.43, при следующих исходных данных: $E=200\,000$ МПа; $\alpha_{св}=15\cdot 10^{-6}$; $T_n=500\text{ }^{\circ}\text{C}$; $T_0=1500\text{ }^{\circ}\text{C}$; $T_k=20\text{ }^{\circ}\text{C}$; $R_2=5$ см; $R_1=2$ см; $S_1=12,6$ см² и $S_2=80$ см².

32. Определите абсолютный и относительный объем усадочной раковины в отливке. Насколько изменится относительный объем усадочной раковины: а) при полном торможении линейной усадки в твердом состоянии; б) при увеличении температуры заливки на $100\text{ }^{\circ}\text{C}$. Условия задания приведены в табл. 4.2.

33. С помощью метода «вписанных окружностей» проконтролируйте соблюдение принципа направленного затвердевания. При необходимости постройте профиль технологического напуска. Рассчитайте объем прибыли по методу Й. Пржибыла.

Схемы отливок приведены на рис. 4.51 (для вариантов 1–7), 4.52 (для вариантов 8–15), 4.53 (для вариантов 16–23), 4.54 (для вариантов 24–29), исходные данные – в табл. 4.3.

34. Исходя из схемы отливок и условий задания 33 (соответствующего варианта), определите массу внутренних холодильников, которые следует установить в термический узел отливки, чтобы обеспечить выполнение принципа направленного затвердевания без применения технологического напуска. Теплофизические свойства сплавов и материала холодильников приведены в табл. 4.4, 4.5.

35. Для отливок, схемы которых приведены на рис. 4.55 (для вариантов 1–8), 4.56 (для вариантов 9–14), 4.57 (для вариантов 15–22), 4.58 (для вариантов 23–30), определите величины и характер остаточных термических напряжений в элементах. Проверьте, приведут ли эти напряжения к образованию холодных трещин. Каким следует принять значение коэффициента аккумуляции тепла формой $b_{\phi 2}$ в местах, оформляющих толстостенные элементы, чтобы исключить трещинообразование?

Исходные данные приведены в табл. 4.6. На схемах отливок (см. рис. 4.55–4.58) тонкостенные элементы отмечены индексом 1, а толстостенные – индексом 2. Размеры, по которым отливки испытывают термическое торможение усадки, для разных вариантов следующие: D_2 (варианты 1–8, 9–14), d и D_2 (варианты 15–22), l_1 (варианты 23–30). Предел прочности стали для всех вариантов следует принять равным 600 МПа.

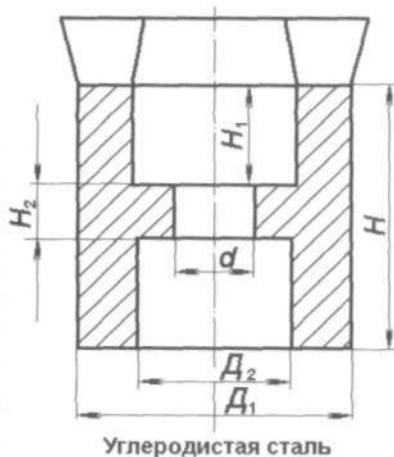


Рис. 4.51. Схема отливки для вариантов 1–7

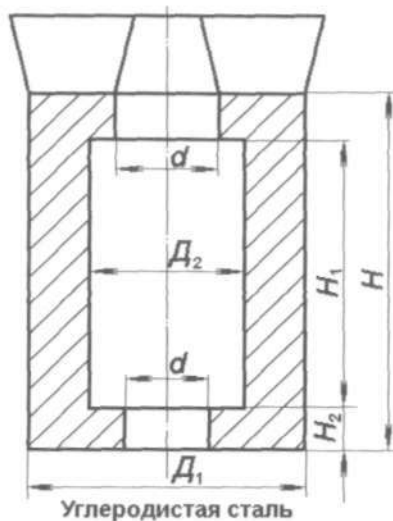


Рис. 4.52. Схема отливки для вариантов 8–15

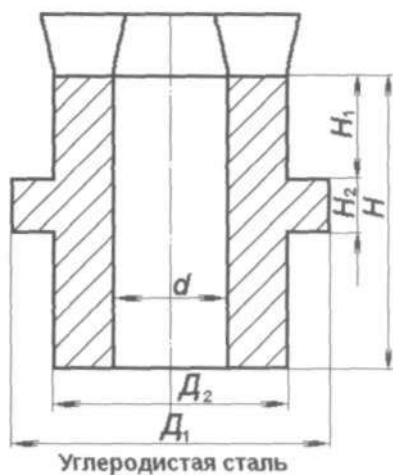


Рис. 4.53. Схема отливки для вариантов 16–23

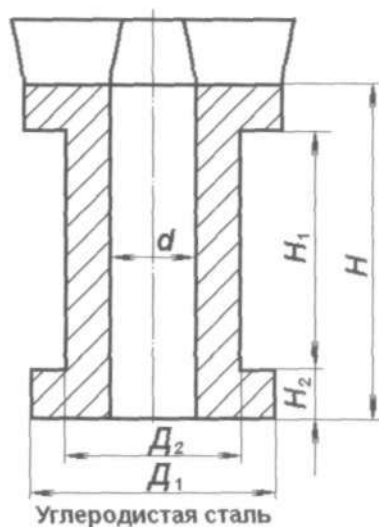


Рис. 4.54. Схема отливки для вариантов 24–29

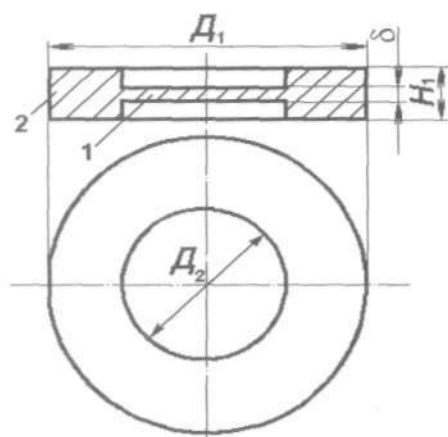


Рис. 4.55. Схема отливки для вариантов 1–8 (табл. 4.6)

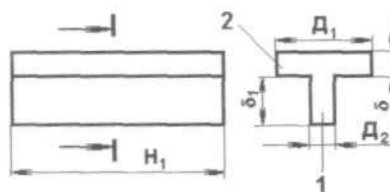


Рис. 4.56. Схема отливки для вариантов 9–14 (табл. 4.6)

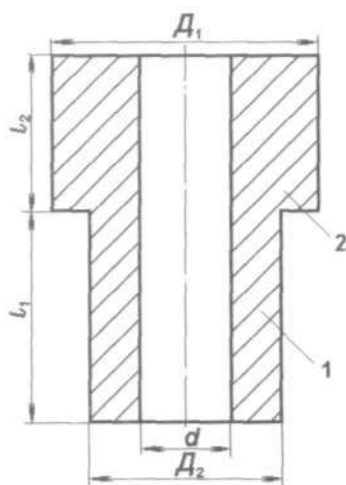


Рис. 4.57. Схема отливки для вариантов 15–22

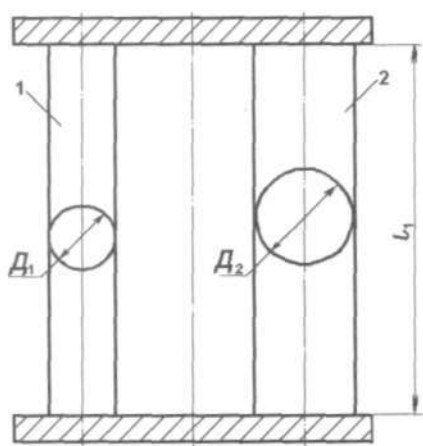


Рис. 4.58. Схема отливки для вариантов 23–30

Таблица 4.2

Исходные данные к заданию 32

Номер вар.	Сплав	$\alpha_{V,жс},$ К ⁻¹	$\varepsilon_{V,ла}$ те	$\alpha_{лн},$ К ⁻¹	$\varepsilon_{V,р}$	$T_{лат},$ °C	$T_{л},$ °C	$T_{с},$ °C	$T_{ср},$ °C	$V_{о},$ см ³ ·10 ⁴
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	Сталь	1,0·10 ⁻⁴	0,03	1,5·10 ⁻⁵	—	1650	1510	1430	1280	3,5
2	Чугун	1,0·10 ⁻⁴	—	0,8·10 ⁻⁵	0,002	1350	1190	1150	1000	5,0
3	Силумин	1,2·10 ⁻⁴	0,04	2,0·10 ⁻⁵	—	750	610	577	477	4,0
4	Сталь	1,0·10 ⁻⁴	0,03	1,5·10 ⁻⁵	—	1700	1510	1430	1380	6,0
5	Чугун	1,0·10 ⁻⁴	—	0,8·10 ⁻⁵	0,002	1400	1190	1150	1100	3,0
6	Силумин	1,2·10 ⁻⁴	0,04	2,0·10 ⁻⁵	—	700	610	577	540	4,5
7	Сталь 110Г13Л	1,0·10 ⁻⁴	0,05	1,8·10 ⁻⁵	—	1500	1340	1240	940	10,0
8	Белый чугун	1,0·10 ⁻⁴	0,03	1,5·10 ⁻⁵	—	1450	1190	1150	950	8,0
9	Силумин	1,2·10 ⁻⁴	0,04	2,0·10 ⁻⁵	—	800	610	577	400	6,0
10	Сталь	1,0·10 ⁻⁴	0,03	1,5·10 ⁻⁵	—	1750	1510	1430	1200	3,0
11	Чугун	1,0·10 ⁻⁴	—	0,8·10 ⁻⁵	0,002	1400	1190	1150	950	6,0
12	Силумин	1,2·10 ⁻⁴	0,04	2,0·10 ⁻⁵	—	700	610	577	400	7,0
13	Сталь 110Г13Л	1,0·10 ⁻⁴	0,05	1,8·10 ⁻⁵	—	1550	1340	1240	1200	4,0
14	Белый чугун	1,0·10 ⁻⁴	0,03	1,5·10 ⁻⁵	—	1450	1190	1150	1100	5,0
15	Силумин	1,2·10 ⁻⁴	0,04	2,0·10 ⁻⁵	—	750	610	577	537	6,0
16	Сталь	1,0·10 ⁻⁴	0,03	1,5·10 ⁻⁵	—	1700	1510	1430	1130	2,5
17	Сталь	1,0·10 ⁻⁴	0,03	1,5·10 ⁻⁵	—	1750	1510	1430	1180	4,5
18	Сталь	1,0·10 ⁻⁴	0,03	1,5·10 ⁻⁵	—	1650	1510	1430	1200	7,0
19	Чугун	1,0·10 ⁻⁴	—	0,8·10 ⁻⁵	0,002	1400	1190	1150	1050	3,0
20	Чугун	1,0·10 ⁻⁴	—	0,8·10 ⁻⁵	0,002	1450	1190	1150	850	5,0
21	Чугун	1,0·10 ⁻⁴	—	0,8·10 ⁻⁵	0,002	1500	1190	1150	1110	7,0
22	Белый чугун	1,0·10 ⁻⁴	0,03	1,5·10 ⁻⁵	—	1400	1190	1150	1000	4,5
23	Белый чугун	1,0·10 ⁻⁴	0,03	1,5·10 ⁻⁵	—	1450	1190	1150	900	6,5
24	Белый чугун	1,0·10 ⁻⁴	0,03	1,5·10 ⁻⁵	—	1500	1190	1150	850	7,5
25	Силумин	1,2·10 ⁻⁴	0,04	2,0·10 ⁻⁵	—	700	610	577	527	5,0
26	Силумин	1,2·10 ⁻⁴	0,04	2,0·10 ⁻⁵	—	750	610	577	300	7,0
27	Силумин	1,2·10 ⁻⁴	0,04	2,0·10 ⁻⁵	—	800	610	577	350	8,0
28	Сталь 110Г13Л	1,0·10 ⁻⁴	0,05	1,8·10 ⁻⁵	—	1500	1340	1240	940	9,0
29	Сталь 110Г13Л	1,0·10 ⁻⁴	0,05	1,8·10 ⁻⁵	—	1450	1340	1240	840	10,0
30	Сталь 110Г13Л	1,0·10 ⁻⁴	0,05	1,8·10 ⁻⁵	—	1550	1340	1240	740	12,0

Таблица 4.3

Исходные данные к заданию 33

Номер вари- анта	$V_{\text{в}},$ см ³	$\alpha_{V\Sigma}$	$T_{\text{зат}},$ °C	β	$D_1,$ см	$D_2,$ см	$d,$ см	$H,$ см	$H_1,$ см	$H_2,$ см
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	32000	0,045	1650	0,08	40	30	20	50	20	10,0
2	61200	0,052	1700	0,15	40	20	10	60	20	15,0
3	43000	0,059	1750	0,20	40	25	15	50	18	12,5
4	68800	0,045	1650	0,08	60	50	40	70	30	10,0
5	163200	0,042	1600	0,15	60	40	20	80	30	20,0
6	126900	0,045	1650	0,20	60	45	30	90	35	15,0
7	32000	0,052	1700	0,15	40	30	20	50	20	10,0
8	36000	0,045	1650	0,08	40	30	20	50	30	10,0
9	64800	0,052	1700	0,15	40	20	10	60	25	15,0
10	47000	0,059	1750	0,20	40	25	15	50	20	12,5
11	76000	0,045	1650	0,08	60	50	40	70	40	10,0
12	184600	0,042	1600	0,15	60	40	20	80	35	20,0
13	140400	0,045	1650	0,20	60	45	30	90	50	15,0
14	36000	0,059	1750	0,20	40	30	20	50	30	10,0
15	47000	0,045	1650	0,15	40	25	15	50	20	12,5
16	32500	0,045	1650	0,08	50	40	30	50	20	10,0
17	62000	0,052	1700	0,15	50	40	20	60	20	15,0
18	44500	0,059	1750	0,20	50	40	25	50	18	12,5
19	70000	0,045	1650	0,08	70	60	50	70	30	10,0
20	16500	0,042	1600	0,15	80	60	40	80	30	20,0
21	130000	0,045	1650	0,20	75	60	45	90	35	15,0
22	32500	0,052	1700	0,15	50	40	30	50	20	10,0
23	37000	0,066	1500	0,08	50	40	30	50	20	10,0
24	66000	0,071	1550	0,15	50	40	20	60	20	15,0
25	50000	0,076	1600	0,20	50	40	25	50	18	12,5
26	80000	0,066	1500	0,08	70	60	50	70	30	10,0
27	200000	0,071	1550	0,15	80	60	40	80	30	20,0
28	150000	0,076	1600	0,20	75	60	45	90	35	15,0
29	38000	0,071	1550	0,08	50	40	20	50	20	15,0

Таблица 4.4

Теплофизические свойства сплавов

Сплав	Свойства сплава			
	T_m , °C	L , Дж/г	c , Дж/(г·K)	ρ , г/см ³
Сталь углеродистая	1510	280	0,92	7,2
Сталь 110Г13Л	1340	270	0,80	7,2

Таблица 4.5

Теплофизические свойства холодильников

Материал холодильника	Свойства холодильника	
	T_c , °C	c_d , Дж/(г·K)
Сталь углеродистая	1430	0,68
Сталь 110Г13Л	1240	0,60

Таблица 4.6

Исходные данные к заданию 35

Номер варианта	Размеры, см						
	l_1	l_2	D_1	D_2	d	H	δ
1	—	—	50	30	—	10	5,0
2	—	—	60	30	—	20	5,0
3	—	—	70	60	—	10	5,0
4	—	—	80	60	—	20	10,0
5	—	—	50	40	—	10	5,0
6	—	—	60	50	—	10	5,0
7	—	—	70	65	—	10	2,5
8	—	—	80	60	—	10	5,0
9	—	—	20	5	—	100	10,0
10	—	—	25	10	—	150	15,0
11	—	—	20	5	—	80	8,0
12	—	—	20	5	—	50	5,0
13	—	—	20	5	—	100	10,0
14	—	—	30	10	—	150	15,0
15	40	40	40	30	20	—	—
16	40	40	40	20	10	—	—
17	40	40	50	40	30	—	—
18	40	40	50	30	20	—	—
19	40	40	50	20	10	—	—
20	40	40	60	40	30	—	—
21	40	40	60	30	20	—	—
22	40	40	60	20	10	—	—
23	100	—	2	3	—	—	—
24	100	—	2	4	—	—	—
25	100	—	2	6	—	—	—
26	100	—	2	8	—	—	—
27	100	—	2	10	—	—	—
28	100	—	2	12	—	—	—
29	100	—	2	14	—	—	—
30	100	—	2	16	—	—	—

РАЗДЕЛ 5. ОСНОВЫ ЛИТЕЙНОЙ ГИДРАВЛИКИ

Известно, что получение качественных отливок во многом определяется гидродинамическими закономерностями при заполнении формы сплавом. В процессе развития теории литейных процессов сформировалась специфическая отрасль прикладной науки – литейная гидравлика, которая посвящена исследованию закономерностей движения металлических расплавов в условиях литейной формы.

Глава 1. ОСОБЕННОСТИ ГИДРОДИНАМИКИ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ РАСПЛАВОВ

Перегретые выше температуры плавления или ликвидуса жидкие металлы подчиняются закономерностям движения обычных ньютоновских жидкостей. Однако движение расплавов в литейной форме характеризуется рядом специфических особенностей:

1. Жидкие металлы и сплавы отличаются от обычных неэлектропроводных жидкостей на порядок более высоким поверхностным натяжением. Например, у воды $\sigma = 72$ МДж/м², а у жидких алюминия и железа – соответственно 800 и 1860 МДж/м². Это обуславливает особенности поведения потоков жидких сплавов, имеющих свободные, граничащие с газовой фазой, поверхности.

2. При температуре ниже температуры ликвидуса происходит изменение реологической природы сплава, вызванное выделением в расплаве твердой фазы. В первом приближении поведение сплавов в интервале кристаллизации вблизи температуры ликвидуса можно описать реологической моделью тела Бингама. При этом предельное касательное напряжение сдвига τ_s и структурная вязкость η_s расплава резко увеличиваются с уменьшением температуры, так как при этом повышается концентрация твердой фазы в расплаве. На рис. 5.1 показан характер изменения величин τ_s и η_s в интервале кристаллизации.

Движение тела Бингама не подчиняется общим гидравлическим закономерностям. Например, для него не соблюдается закон сообщающихся сосудов. Уровни жидкости в двух соединенных друг с другом открытых сосудах могут быть различными (рис. 5.2).

Как видно на рис. 5.2, уровень жидкости в правом сосуде выше, чем в левом, на величину Δh . Выразим Δh через параметры системы. Для этого напомним уравнение баланса сил, приложенных к жидкости. Сила тяже-

сти, стремящаяся выровнять уровни, равна $G = \rho g \frac{\pi d^2}{4} \cdot \Delta h$. Этой силе противодействуют упругие силы, если создаваемые силой G касательные напряжения τ не превышают предельного касательного напряжения сдвига τ_s . Течение жидкости, приводящее к выравниванию уровней, возникает лишь при $\tau > \tau_s$.

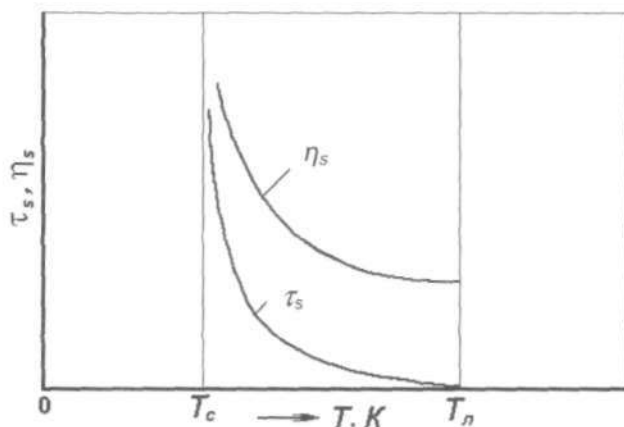


Рис. 5.1. Характер изменения величин в интервале ликвидус – солидус

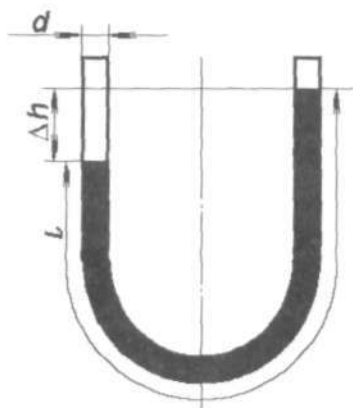


Рис. 5.2. Поведение тела Бингама в сообщающихся сосудах

При равновесии $\tau_s \cdot S = G$, где $S = \pi dl$ – площадь контакта жидкости с поверхностью трубки, жидкость находится в покое, т.е. $\tau_s \cdot \pi dl = \rho g \frac{\pi d^2}{4} \cdot \Delta h$. Отсюда $\Delta h = \frac{4\tau_s \cdot l}{\rho g d}$. Очевидно, что для ньютоновской жидкости ($\tau_s = 0$) $\Delta h = 0$ (закон сообщающихся сосудов). Рассмотрим установившееся движение бингамовой жидкости в круглой цилиндрической трубе (рис. 5.3).

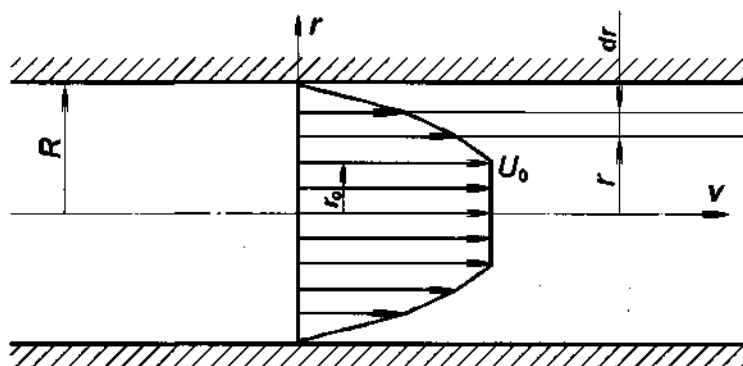


Рис. 5.3. Эпюра скоростей при движении бингамовой жидкости в трубе

Реологический закон тела Бингама имеет вид $\tau = \tau_s \pm \mu_s \frac{dv}{dr}$, или $\frac{dv}{dr} = \pm \frac{1}{\mu_s} (\tau - \tau_s)$ при $\tau \geq \tau_s$ и $\frac{dv}{dr} = 0$ при $\tau < \tau_s$. Так как $\frac{dv}{dr} < 0$, для рассматриваемого случая имеем

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{\tau - \tau_s}{\mu_s} \text{ при } \tau \geq \tau_s,$$

$$\frac{dv}{dr} = 0 \text{ при } \tau < \tau_s. \quad (5.1)$$

Анализ эпюры скоростей при ламинарном установившемся движении ньютоновской жидкости показывает, что при $r=0$ $\frac{dv}{dr} = 0$. Значит, на оси трубы $\tau < \tau_s$.

Найдем распределение касательного напряжения по сечению трубы. К жидкости в трубе приложен перепад давлений ΔP . Следовательно, на ядро жидкости внутри выбранного цилиндрического слоя радиусом r (см. рис. 5.3) действует сила $F_r = \Delta P \cdot S_r = \Delta P \cdot \pi r^2$. Касательное напряжение на расстоянии r от оси трубы можно найти, разделив силу F_r на площадь контакта слоев $2\pi r l$, где l – длина трубы, т.е.

$$\tau(r) = \Delta P \frac{\pi r^2}{2\pi r l} = \Delta P \frac{r}{2l}.$$

Значит, касательные напряжения распределены по сечению трубы по линейному закону (рис. 5.4). На рис. 5.4 кроме прямой, характеризующей зависимость $\tau(r)$, проведена прямая, соответствующая уровню τ_s . Видно,

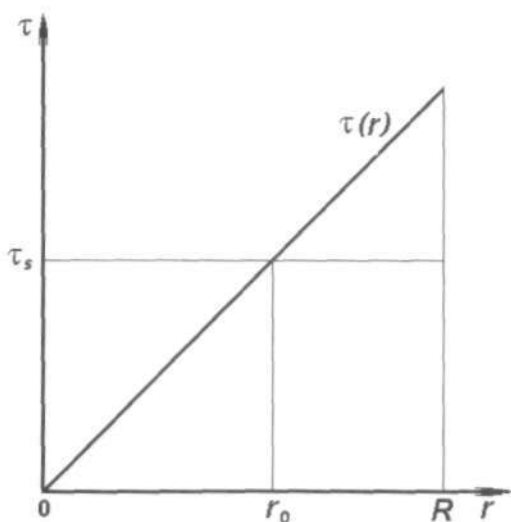


Рис. 5.4. Распределение касательных напряжений $\tau(r)$ по сечению потока в трубе

что при $R \geq r > r_0$ $\tau(r) > \tau_s$, т.е. $\frac{dv}{dr} = -\frac{1}{\eta_s}(\tau - \tau_s)$. При $r < r_0$ $\tau(r) < \tau_s$ и $\frac{dv}{dr} = 0$, т.е. в центре потока $v = \text{const} = v_0$ (см. рис. 5.3).

Приравняв значения τ и τ_s , получим выражение для вычисления r_0 :

$$\begin{aligned} \Delta P \cdot \frac{r_0}{2l} &= \tau_s, \\ r_0 &= \frac{2\tau_s l}{\Delta P}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Найдем распределение скоростей в периферийной зоне ($r_0 < r \leq R$). Рассмотрим баланс сил, действующих на цилиндрический слой толщиной dr с внутренним радиусом r (см. рис. 5.3). На внутреннюю поверхность слоя действует сила F_1 со стороны более быстро двигающихся центральных слоев, направленная в сторону движения жидкости.

$$F_1 = \tau(r) \cdot S(r) = \tau(r) \cdot 2\pi r l.$$

На наружной поверхности действует сила F_2 со стороны более медленно двигающихся периферийных слоев, направленная против движения жидкости.

$$\begin{aligned} F_2 &= \tau(r + dr) \cdot S(r + dr) = \tau(r + dr) \cdot 2\pi l(r + dr), \\ \tau(r + dr) &= \tau(r) + \frac{d\tau(r)}{dr} \cdot dr. \end{aligned}$$

С учетом этого

$$\begin{aligned} F_2 &= \left[\tau(r) + \frac{d\tau(r)}{dr} \cdot dr \right] \cdot 2\pi l(r + dr) = 2\pi l \left[\tau(r) dr + d\tau(r) \cdot \frac{r dr}{dr} + \right. \\ &\quad \left. + \tau(r)r + d\tau(r) \cdot \frac{dr^2}{dr} \right] = 2\pi l \left[\tau(r)r + \tau(r)dr + d\tau(r) \frac{r dr}{dr} \right], \end{aligned}$$

так как величиной $d\tau(r) \frac{dr^2}{dr}$ можно пренебречь как бесконечно малой, более высокого порядка малости (dr^2 по сравнению с dr).

Равнодействующая этих сил, направленная против движения, равна

$$R = F_2 - F_1 = 2\pi l \cdot [\tau(r)r + \tau(r)dr + \frac{d\tau(r)}{dr} \cdot rdr - \tau(r)r] = 2\pi l dr [\tau(r) + \frac{d\tau(r)}{dr} r].$$

$$\tau(r) = \tau_s - \eta_s \frac{dv}{dr}; \quad \frac{d\tau(r)}{dr} = -\eta_s \frac{d^2v}{dr^2}.$$

С учетом этого имеем

$$R = 2\pi l \cdot dr [\tau_s - \eta_s \frac{dv}{dr} - \eta_s r \frac{d^2v}{dr^2}] = 2\pi l r \eta_s dr [\frac{\tau_s}{\eta_s r} - (\frac{1}{r} \cdot \frac{dv}{dr} + \frac{d^2v}{dr^2})].$$

При установившемся движении R уравновешивается силой давления $F_\theta = \Delta P \cdot dS$, где $dS = 2\pi r dr$ – площадь сечения слоя.

$$F_\theta = 2\pi \Delta P \cdot r dr.$$

$$2\pi l r \cdot \eta_s dr \cdot [\frac{\tau_s}{\eta_s r} - (\frac{1}{r} \cdot \frac{dv}{dr} + \frac{d^2v}{dr^2})] = 2\pi \cdot \Delta P \cdot r dr.$$

Разделив обе части уравнения на $2\pi \cdot r dr \eta_s l$, получим

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{dv}{dr} + \frac{d^2v}{dr^2} = \frac{\tau_s}{\eta_s r} - \frac{\Delta P}{l \eta_s}.$$

Введем функцию $Z = r \frac{dv}{dr}$, $\frac{dZ}{dr} = \frac{dv}{dr} + r \frac{d^2v}{dr^2} = r(\frac{dv}{dr} \cdot \frac{1}{r} + \frac{d^2v}{dr^2})$.

С учетом этого уравнение примет вид

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{dZ}{dr} = \frac{\tau_s}{\eta_s r} - \frac{\Delta P}{l \eta_s}, \quad \text{и} \quad dZ = (\frac{\tau_s}{\eta_s r} - \frac{\Delta P}{l \eta_s}) \cdot r dr.$$

После интегрирования получим $Z = \frac{\tau_s \cdot r}{\eta_s} - \frac{\Delta P \cdot r^2}{2l \eta_s} + C_1$.

Используем граничное условие: при $r=r_0$ $\frac{dv}{dr}=0$, $Z=0$. Значит,

$$C_1 = \frac{\Delta P \cdot r_0^2}{2\eta_s l} - \frac{\tau_s \cdot r_0}{\eta_s}.$$

С учетом значения r_0 (см. выражение (5.2)) получаем

$$C_1 = \frac{\Delta P}{2\eta_s l} \cdot \frac{4\tau_s^2 l^2}{\Delta P^2} - \frac{\tau_s}{\eta_s} \cdot \frac{2\tau_s l}{\Delta P} = \frac{2\tau_s^2 l}{\eta_s \Delta P} - \frac{2\tau_s^2 l}{\eta_s \Delta P} = 0.$$

Следовательно, $Z = r \frac{dv}{dr} = \frac{\tau_s r}{\eta_s} - \frac{\Delta P \cdot r^2}{2\eta_s l}$.

Отсюда $\frac{dv}{dr} = \frac{\tau_s}{\eta_s} - \frac{\Delta P \cdot r}{2\eta_s l}$; $dv = (\frac{\tau_s}{\eta_s} - \frac{\Delta P \cdot r}{2\eta_s l})dr$.

После интегрирования получим

$$v = \frac{\tau_s \cdot r}{\eta_s} - \frac{\Delta P \cdot r^2}{4\eta_s l} + C_2. \quad (5.3)$$

Найдем C_2 , исходя из граничного условия: при $r=R$ $v=0$.

$$C_2 = \frac{\Delta P \cdot R^2}{4\eta_s l} - \frac{\tau_s \cdot R}{\eta_s}.$$

Подставив это выражение в (5.3), получим формулу, характеризующую распределение скорости в периферийном слое потока ($r_0 < r \leq R$):

$$v = \frac{\Delta P(R^2 - r^2)}{4\eta_s l} - \frac{\tau_s(R - r)}{\eta_s}.$$

Если в данную формулу подставить значение $r=r_0$, то получим значение скорости в центральном ядре потока ($r < r_0$).

$$v_0 = \frac{\Delta P(R^2 - r_0^2)}{4\eta_s l} - \frac{\tau_s(R - r_0)}{\eta_s}.$$

С учетом выражения (5.2) получаем

$$v_0 = \frac{\Delta P(R^2 - 4\tau_s^2 \frac{l^2}{\Delta P^2})}{4\eta_s l} - \frac{\tau_s(R - 2\tau_s \frac{l}{\Delta P})}{\eta_s}.$$

Выполнив преобразования, находим

$$v_0 = \frac{(R\Delta P - 2\tau_s l)^2}{4\eta_s l \cdot \Delta P}. \quad (5.5)$$

При $\tau_s=0$ формула (5.5) преобразуется в формулу для расчета $U_{\max}$ на оси трубы при ламинарном движении ньютоновской жидкости, а r_0 становится равным нулю.

При $r_0=R$, т.е. при $2\tau_s \frac{l}{\Delta P} = R$ и $\Delta P = 2\tau_s \frac{l}{R}$, $v_0=0$. Следовательно, если предельное касательное напряжение сдвига по мере снижения температуры сплава увеличится до $\tau_s = \frac{R \cdot \Delta P}{2l}$, при котором $r_0=R$, то произойдет остановка потока. Температура внутри интервала ликвидус–солидус, при которой будет выполнено это условие, называется *температурой нулевой жидкотекучести*.

Приведенный выше вывод справедлив при постоянном значении τ_s по поперечному сечению потока, что имеет место лишь при равномерном распределении температуры по сечению.

При движении чистых технических металлов и ряда сплавов на стенках канала будет нарастать затвердевшая корка, которая по мере роста будет уменьшать проходное сечение канала. В момент, когда корочки, растущие на противоположных поверхностях канала, сомкнутся, поток остановится.

3. Движение жидкости по каналам с изменяющейся во времени площадью поперечного сечения – специфическая особенность литейной гидравлики.

4. В отличие от технических водопроводных систем течение жидких сплавов в литейной форме осуществляется по относительно коротким каналам при наличии значительного числа местных сопротивлений (сужения

и расширения потока, повороты, разветвление потоков и т.п.), которые играют решающую роль.

Местные сопротивления в литейных системах располагаются близко друг к другу, поэтому имеет место взаимодействие сопротивлений. При этом вычисление общего сопротивления системы путем суммирования отдельных сопротивлений является неправомерным.

5. Течение жидких расплавов в литейной форме характеризуется числами Рейнольдса, меньшими нижней границы автомодельной области по местным сопротивлениям. Поэтому коэффициенты сопротивлений в большинстве случаев зависят от числа Рейнольдса.

Глава 2. ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИЕ И ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ ТЕЧЕНИИ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ РАСПЛАВОВ В ЛИТЕЙНОЙ ФОРМЕ

При течении сплавов в каналах литейной формы происходит охлаждение головной части потока, так как тепло непрерывно отводится в стенки формы. Отличительной особенностью течения является то, что в относительно коротких каналах, характерных для литейных форм, даже при мало изменяющихся, практически безинерционных режимах течения эпюры скоростей в потоке не успевают стабилизироваться. Пример распределения эпюр скоростей по длине потока в канале показан на рис. 5.5.

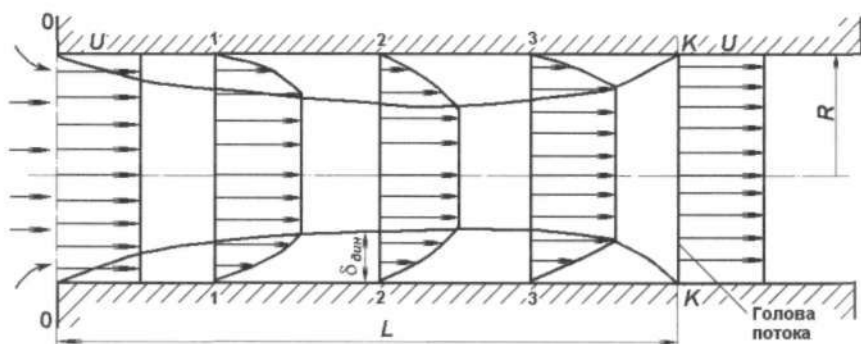


Рис. 5.5. Распределение эпюр скоростей по длине потока

Как видно на рис. 5.5, скорости распределены практически равномерно по поперечному сечению потока как во входном сечении трубы, так и в голове потока. По мере удаления от входа в канал и от головы потока

толщина заторможенного потока $\delta_{\text{дин}}$ увеличивается, но при реальных значениях длины потока L никогда не становится равной R , т.е. полная стабилизация эпюры не достигается. Поэтому как при турбулентном, так и при ламинарном режимах коэффициенты Кориолиса α в уравнении Бернулли можно считать равными 1. В потоке сплава всегда имеются поперечные компоненты скоростей, особенно развитые в голове потока.

2.1. Механизмы остановки потока сплава в литейной форме

При заполнении канала сплавом можно выделить следующие три этапа:

1. В ходе первого этапа температура на границе головной части потока и формы T_K больше температуры нулевой жидкотекучести сплава $T_{н.жс}$. В конце этапа ($t=t_1$) $T_K=T_{н.жс}$. Можно с достаточной точностью принять, что на первом этапе выделение твердой фазы в голове потока не происходит.

2. В процессе второго этапа температура на границе головной части с формой остается постоянной и равной температуре нулевой жидкотекучести, т.е. $T_K=T_{н.жс}$. На стенках канала может намерзать корка твердого металла. Это имеет место при последовательной кристаллизации расплава (чистые металлы и эвтектические сплавы). При объемной кристаллизации (широкоинтервальные сплавы) корка твердого металла не образуется, а выделяющаяся твердая фаза перемещается вместе с головой потока. В конце этапа (при $t=t_1+t_2$) головная часть потока охлаждается до температуры ликвидуса.

3. В конце третьего этапа течения головы потока без перегрева поток останавливается ($t=t_1+t_2+t_3$).

Рассмотрим механизмы остановки потока.

При чисто последовательном затвердевании сплава на стенках потока, начиная со второго этапа, нарастает твердая корка, профиль которой показан на рис. 5.6.

В момент остановки потока максимальная толщина твердой корки $\xi_{\text{max}}=R$, т.е. корка перекрывает поперечное сечение канала, что и вызывает остановку потока.

Признаком такого механизма остановки является наличие на конце затвердевшего прутка металла усадочной раковины, вызванной тем, что затвердевшие в ходе течения потока корочки отделяют объем жидкого металла от зоны питания его расплавом из лежащих впереди сечений (рис. 5.7).

Форма показанного на рис. 5.6 профиля затвердевающей корки при движении расплава объясняется специфическими условиями теплообмена

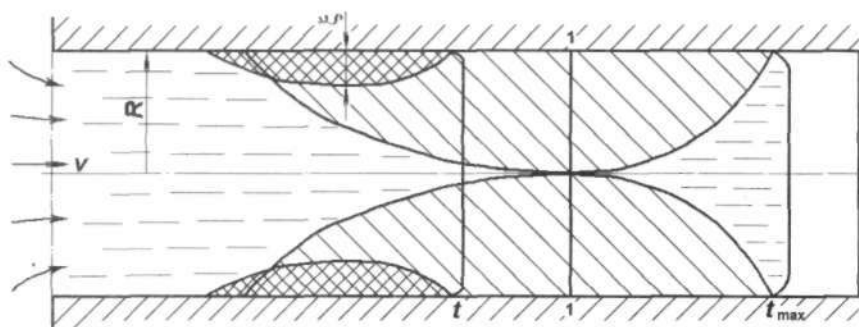


Рис. 5.6. Профили твердой корки на стенках канала в некоторый момент времени t и в момент остановки потока ($t=t_{\max}$)

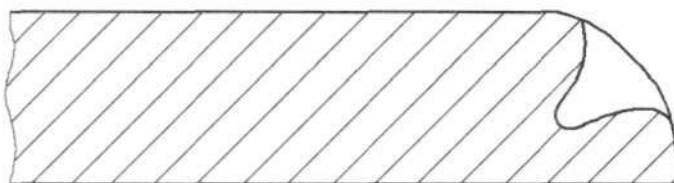


Рис. 5.7. Вид концевой части прутка в незалитой до конца из-за остановки потока полости формы

потока со стенками формы.

Примем в первом приближении, что твердая корка растет по закону квадратного корня

$$\xi = m\sqrt{t'},$$

где t' – продолжительность теплового взаимодействия данного элемента формы с расплавом.

Свяжем с рассматриваемым каналом неподвижную и подвижную системы координат (рис. 5.8). Подвижная система координат имеет свое начало в головной части потока и движется вместе с ней со скоростью v .

Выделим фиксированный элемент формы длиной dy на расстоянии y от входа в канал. Координата y_1 этого элемента в подвижной системе координат в процессе течения сплава меняется. В момент прохождения этого

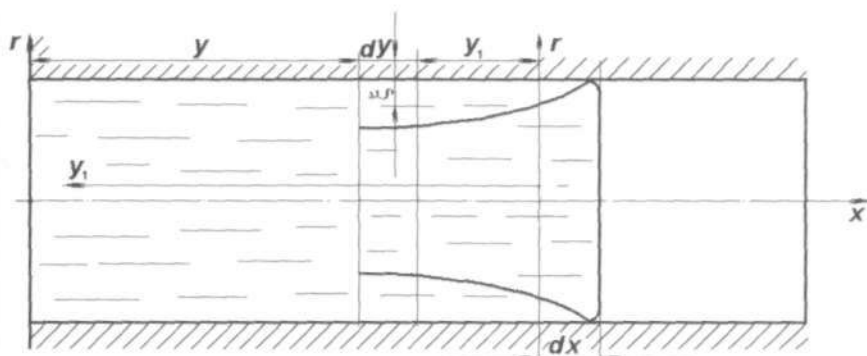


Рис. 5.8. Подвижная и неподвижная системы координат, связанные с потоком расплава

элемента головой потока его координата vt , где t – время от начала заполнения канала сплавом. Координата в подвижной системе координат в данный момент $y_1=0$. При этом указанный элемент формы начинает свое тепловое взаимодействие с расплавом, т.е. $t'=0$ и $\xi=0$.

Таким образом, голова потока все время набегает на холодные участки формы при $t'=0$ и $\xi=0$. К моменту положения головы потока на расстоянии, равном $(v+y_1)$, т.е. на расстоянии y_1 от данного сечения формы, оно находится в тепловом взаимодействии со сплавом в течение времени

$$t' = \frac{y_1}{v}. \text{ Толщина твердой корки при этом равна } \xi = m \sqrt{\frac{y_1}{v}}, \text{ т.е по мере}$$

удаления от головы потока толщина твердой корки растет по параболическому закону. Такое изменение толщины твердой корки имеет место при температуре кристаллизации металла на входе в канал. Очевидно, что при этом перехват канала корочками твердого металла произойдет во входном сечении (рис. 5.9).

Если температура на входе выше температуры кристаллизации, то корочка начнет расти лишь при $t > t_1$, где t_1 – длительность первого этапа течения.

Как будет показано ниже, в процессе течения сплава температура в каждом его сечении, фиксированном относительно неподвижной системы координат, увеличивается. Это приводит к оплавлению ранее образовавшейся твердой корки и замедлению ее роста, так как константа затвердевания m с повышением температуры уменьшается.

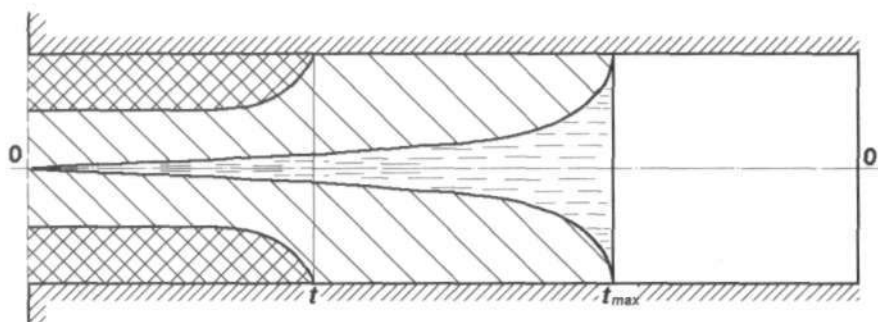


Рис. 5.9. Конфигурация затвердевшей корки металла в некоторый момент времени t и в момент остановки потока $t_{\max}$

Схемы, приведенные на рис. 5.6–5.9, отражают характер течения химически чистых металлов, так как только в этом случае имеет место гладкий фронт кристаллизации. При затвердевании технически чистых металлов и сплавов фронт кристаллизации имеет шероховатый характер, при этом отдельные кристаллиты могут более или менее глубоко проникать внутрь расплава (рис. 5.10).

В отличие от течения химически чистых металлов, при котором остановка потока происходит в момент полного перекрытия проходного сечения канала затвердевшей коркой, при течении технически чистых металлов и сплавов в момент остановки потока сечение перекрывают выступающие ветви кристаллитов, в промежутках между которыми имеется определенное количество незатвердевшего жидкого расплава (см. рис. 5.10). При этом в момент остановки в сечении 1–1, где происходит перехват се-

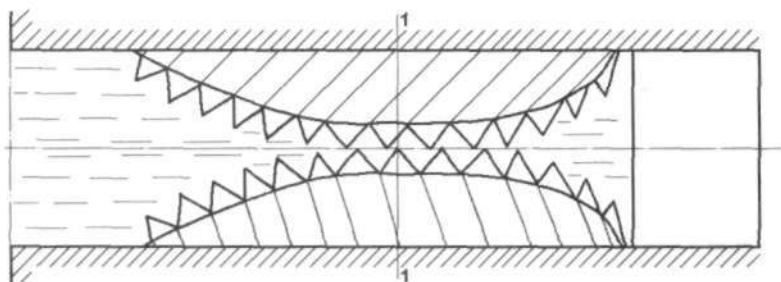


Рис. 5.10. Характер фронта кристаллизации сплава в момент остановки потока

чения канала, выделяется некоторое относительное количество твердой фазы $N = \frac{m_{тв}}{M}$, где $m_{тв}$ и M – соответственно массы выделившейся твердой фазы и исходного жидкого расплава.

Так как $m_{тв} = \rho_{тв} \cdot V_{тв} = \rho_{тв} \cdot S_{тв} \cdot dx$ и $M = \rho_{жс} V_{жс} = \rho_{жс} S_{кан} \cdot dx$, где dx – длина элемента потока, то

$$N = \frac{\rho_{тв} \cdot S_{тв} \cdot dx}{\rho_{жс} \cdot S_{кан} \cdot dx} \approx \frac{S_{тв}}{S_{кан}},$$

т.е. критическая доля твердой фазы N в момент остановки потока с некоторым приближением равна отношению площади, занимаемой в данном сечении твердой фазой, к площади сечения канала.

Эксперименты показывают, что для технически чистых металлов и эвтектических сплавов критическая доля твердой фазы $N=0,3-0,4$. Очевидно, что для химически чистых металлов $N=1$ (см. рис. 5.6).

В отличие от рассмотренного механизма при чисто объемном затвердевании, которое имеет место при течении широкоинтервальных сплавов, твердая корка на стенках канала не образуется, а твердая фаза выделяется в объеме потока и переносится с ним по течению. Особенно интенсивно твердая фаза выделяется в головной части потока после снижения ее температуры ниже температуры ликвидуса, т.е. на третьем этапе.

Массовая доля твердой фазы ψ связана с температурой сплава внутри интервала кристаллизации $\Delta T_{кр}$ формулой (2.140):

$$\psi = \frac{A(T_A - T)}{T_A - T}, \quad (5.6)$$

где $A = \frac{T_A - T_c}{T_A - T_c}$.

По мере движения головы потока на третьем этапе ее температура уменьшается, а доля твердой фазы растет. При этом резко увеличиваются предельное касательное напряжение сдвига τ_s и структурная вязкость η_s (см. рис. 5.1). Зависимость τ_s от температуры можно выразить функцией

$$\tau_s = B(T_A - T)^n, \quad (5.7)$$

где B и n – эмпирически определяемые величины.

Как следует из формулы (5.5), остановка движения расплава произойдет при выполнении условия

$$\tau_s \geq \frac{R}{2} \cdot \frac{\Delta P}{\Delta x},$$

где $\frac{\Delta P}{\Delta x}$ – градиент давления в голове потока.

Так как η_s в процессе движения головы потока на третьем этапе непрерывно увеличивается, то активная часть перепада давлений ΔP уменьшается из-за возрастающих потерь на гидравлических сопротивлениях.

На рис. 5.11 показан характер изменения τ_s и комплекса $\frac{\Delta P \cdot R}{2\Delta x}$ в процессе движения головной части потока на третьем этапе. Видно, что при $t < t_3$ $\frac{\Delta P \cdot R}{2\Delta x} > \tau_s$, т.е. выполнены условия подвижности суспензии расплава. При $t > t_3$ расплав двигаться не может, и время $t = t_3$ определяет длительность течения сплава на третьем этапе до остановки потока.

Из условия $\tau_s = \frac{\Delta P \cdot R}{2\Delta x}$ найдем выражение для оценки температуры сплава в интервале ликвидус–солидус, при которой происходит остановка

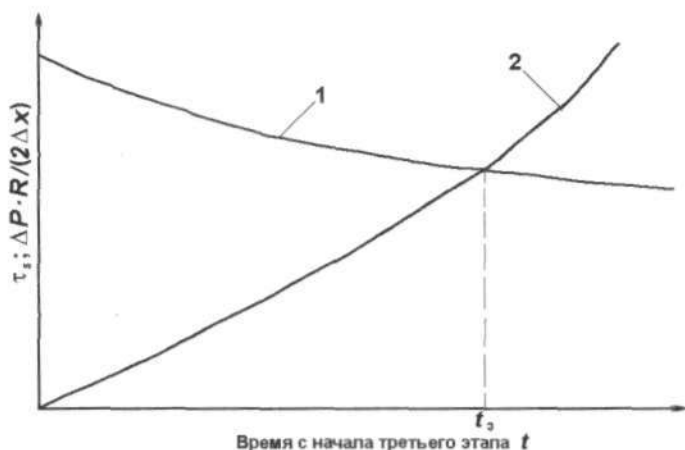


Рис. 5.11. Зависимость τ_s (2) и комплекса $\frac{\Delta P \cdot R}{2\Delta x}$ (1) от продолжительности течения на третьем этапе

потока. Эту температуру называют температурой нулевой жидкотекучести $T_{н.жс}$. С учетом выражения (5.7) имеем

$$B(T_d - T_{н.жс})^n = \frac{\Delta P \cdot R}{2\Delta x}.$$

Разрешив это уравнение относительно $T_{н.жс}$, получим

$$\dot{O}_{l.жс} = T_d - \left(\frac{R_d}{B} \cdot \frac{\Delta P}{\Delta x} \right)^{1/n}, \quad (5.8)$$

где R_d – гидравлический радиус канала (для цилиндра $R_d = \frac{R}{2}$).

По данным Ю.А. Нехендзи, остановка потока в данном случае происходит при некоторой критической доле твердой фазы, выделившейся в голове потока, $\psi=0,2-0,3$. Как видно из формулы (5.8), температура нулевой жидкотекучести и соответствующая ей критическая доля твердой фазы связаны с действующим градиентом давления. Очевидно, что, например, при литье под давлением $T_{н.жс}$ ниже, чем при обычном литье в песчаные формы.

Структура потока в момент его остановки по рассматриваемому механизму показана на рис. 5.12.

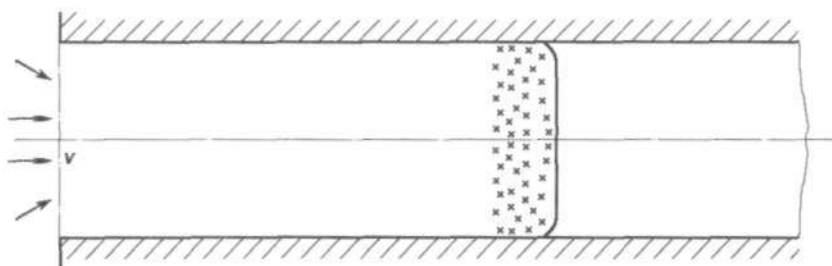


Рис. 5.12. Структура потока в момент остановки течения объемно затвердевающего сплава

Продолжительность течения сплава до остановки потока $t_{\max}$ равна сумме длительностей описанных выше этапов течения, т.е.

$$t_{\max} = t_1 + t_2 + t_3.$$

Очевидно, что при медленной заливке, когда расчетная продолжительность заливки $t_{\text{зал}} > t_{\text{max}}$, поток остановится раньше, чем будет заполнена полость формы, и в отливках возникнут дефекты, называемые недоливами.

2.2. Расчет максимальной продолжительности течения сплавов в каналах литейной формы

Сначала рассмотрим заполнение цилиндрического канала в песчаной форме. Выделим в головной части потока элемент толщиной dx (см. рис. 5.8). В процессе движения этот элемент все время набегает на холодные участки формы, температура которых равна начальной температуре формы T_{20} . Между головным элементом потока и формой имеет место идеальный тепловой контакт, т.е. существует граничное условие четвертого рода. Тепловое взаимодействие этого элемента с формой в процессе течения можно представить как последовательность начальных моментов контактного теплообмена двух тел: расплава со средней по его сечению температурой T_1 и формы, температура которой равна T_{20} . Как показано в гл. 1 разд. 2, при контактировании двух тел с температурами T_1 и T_{20} на их границе мгновенно устанавливается температура

$$T_k = T_{20} + (T_1 - T_{20}) \frac{b_1}{b_1 + b_2}, \quad (5.9)$$

где b_1 и b_2 – соответственно коэффициенты аккумуляции тепла жидким сплавом и материалом формы.

В процессе движения головной части потока его температура T_1 убывает, что в соответствии с выражением (5.9) приводит к снижению контактной температуры T_k . В конце первого этапа течения, т.е. при $t=t_1$, $T_k=T_{н.ж}$. При течении чистых металлов и эвтектических сплавов при $t=t_1$ $T_k=T_{кр}$.

Напишем уравнение теплового баланса для головной части потока:

$$c_1 \rho_1 V \cdot dT_1 = -\alpha (T_1 - T_k) S \cdot dt, \quad (5.10)$$

где c_1 и ρ_1 – удельная теплоемкость и плотность жидкого сплава;

α – коэффициент теплоотдачи от расплава к стенкам канала;

V – объем элемента;

S – поверхность охлаждения элемента.

С учетом выражения (5.9) уравнение (5.10) принимает вид

$$c_1 \rho_1 V \cdot dT_1 = -\alpha (T_1 - T_{20}) \frac{b_2}{b_1 + b_2} S \cdot dt.$$

Разделив переменные и приняв, что $R_z = \frac{V}{S}$, получаем

$$\frac{dT_1}{T_1 - T_{20}} = -\frac{\alpha \cdot b_2}{c_1 \rho_1 \cdot R_z (b_1 + b_2)} \cdot dt.$$

После интегрирования находим

$$\ln(T_1 - T_{20}) = -\frac{\alpha \cdot b_2 \cdot t}{c_1 \rho_1 \cdot R_z (b_1 + b_2)} + \ln C.$$

Постоянную интегрирования найдем из начального условия: при $t=0$ $T_1=T_{10}$, где T_{10} – температура сплава на входе в канал. С учетом этого после преобразований получаем

$$\begin{aligned} \ln \frac{T_1 - T_{20}}{T_{10} - T_{20}} &= -\frac{\alpha \cdot b_2}{c_1 \rho_1 \cdot R_z (b_1 + b_2)} \cdot t, \\ t &= \frac{(b_1 + b_2) \cdot c_1 \rho_1 \cdot R_z}{\alpha \cdot b_2} \ln \frac{T_{10} - T_{20}}{T_1 - T_{20}}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Так как в конце первого этапа $T_k = T_{н.жс}$, то из формулы (5.9) находим соответствующее значение температуры сплава

$$T_1 = T_{20} + (T_{н.жс} - T_{20}) \frac{b_1 + b_2}{b_1}. \quad (5.12)$$

Подставив это выражение в (5.11), находим формулу для расчета длительности первого этапа

$$t_1 = \frac{(b_1 + b_2) \cdot c_1 \rho_1 \cdot R_z}{\alpha \cdot b_2} \ln \left[\frac{(T_{10} - T_{20}) \cdot b_1}{(T_{н.жс} - T_{20})(b_1 + b_2)} \right]. \quad (5.13)$$

Если температура сплава на входе в канал T_{10} не превышает значение, вычисленное по формуле (5.12), т.е.

$$T_{10} \leq T_{20} + (T_{н.жс} - T_{20}) \frac{b_1 + b_2}{b_1}, \quad (5.14)$$

то первый этап течения отсутствует. При этом на границе головного элемента потока с формой сразу же (при $t=0$) установится температура $T_k = T_{н.жс}$.

На втором этапе $T_k = T_{н.жс}$, и уравнение (5.10) принимает вид

$$c_1 \rho_1 R_z \cdot dT_1 = -\alpha(T_1 - T_{н.жс}) \cdot dt.$$

После разделения переменных и интегрирования получаем

$$\ln(T_1 - T_{н.жс}) = -\frac{\alpha t}{c_1 \rho_1 R_z} + \ln C_1. \quad (5.15)$$

При $t=t_1$ $T_1 = T_{20} + (T_{н.жс} - T_{20}) \cdot \frac{b_1 + b_2}{b_1}$ (см. выражение (5.12)). С

учетом этого находим $\ln C_1$. После преобразований имеем

$$\ln \left[\frac{(T_1 - T_{н.жс}) \cdot b_1}{(T_{н.жс} - T_{20}) \cdot b_2} \right] = -\frac{\alpha(t - t_1)}{c_1 \rho_1 R_z},$$

$$\text{или } t = \frac{c_1 \rho_1 R_z}{\alpha} \cdot \ln \left[\frac{(T_{н.жс} - T_{20}) \cdot b_2}{(T_1 - T_{н.жс}) \cdot b_1} \right] + t_1.$$

В конце второго этапа, т.е. при $t=t_1+t_2$, $T_1=T_d$. С учетом этого получаем

$$t_2 = \frac{c_1 \rho_1 R_z}{\alpha} \cdot \ln \left[\frac{(T_{н.жс} - T_{20}) \cdot b_2}{(T_d - T_{н.жс}) \cdot b_1} \right]. \quad (5.16)$$

Если температура на входе в канал удовлетворяет условию (5.14), то первый этап отсутствует. Поэтому постоянную $\ln C$ в уравнении (5.15) следует определять из начального условия: при $t=0$ $T_1=T_{10}$, $\ln C_1=\ln(T_{10}-T_{н.ж})$. С учетом этого из уравнения (5.15) после преобразований получаем

$$t_2 = \frac{c_1 \rho_1 R_c}{\alpha} \cdot \ln \frac{T_{10} - T_{н.ж}}{T_2 - T_{н.ж}}. \quad (5.17)$$

Рассмотрим заполнение канала в металлической форме.

При движении расплава по окрашенной поверхности металлической формы коэффициент теплопередачи через слой кокильной краски в первом

приближении можно рассчитать по формуле $\alpha_k = \frac{\lambda_{кр}}{\delta_{кр}}$. Если пренебречь теплопередачей путем теплопроводности вдоль стенок металлической формы, то температуру формы в месте контакта с набегающей на нее головной частью потока можно принять равной начальной температуре формы T_{20} .

Напишем для головного элемента потока уравнение теплового баланса:

$$c_1 \rho_1 V \cdot dT_1 = -\alpha(T_1 - T_k) S \cdot dt, \quad (5.18)$$

где T_k – температура головной части потока на границе со слоем кокильной краски.

Для определения значения T_k напишем следующее уравнение, выражающее равенство тепловых потоков из расплава к поверхности слоя краски и через слой краски к поверхности формы:

$$\alpha(T_1 - T_k) = \frac{\lambda_{кр}}{\delta_{кр}}(T_k - T_{20}).$$

Отсюда находим

$$T_k = \frac{\alpha T_1 + \frac{\lambda_{кр}}{\delta_{кр}} \cdot T_{20}}{\alpha + \frac{\lambda_{кр}}{\delta_{кр}}}; \quad (5.19)$$

$$T_1 - T_{\kappa} = \frac{\frac{\lambda_{\kappa p}}{\delta_{\kappa p}}}{\alpha + \frac{\lambda_{\kappa p}}{\delta_{\kappa p}}} (T_1 - T_{20}).$$

С учетом этого уравнение (5.18) принимает вид

$$c_1 \rho_1 R_z \cdot dT_1 = - \frac{\alpha \frac{\lambda_{\kappa p}}{\delta_{\kappa p}}}{\alpha + \frac{\lambda_{\kappa p}}{\delta_{\kappa p}}} (T_1 - T_{20}) \cdot dt.$$

Разделив переменные и выполнив интегрирование, находим

$$\ln(T_1 - T_{20}) = - \frac{\alpha \frac{\lambda_{\kappa p}}{\delta_{\kappa p}}}{c_1 \rho_1 R_z (\alpha + \frac{\lambda_{\kappa p}}{\delta_{\kappa p}})} \cdot t + \ln C.$$

Так как при $t=0$ $T_1=T_{10}$, $\ln C = \ln(T_{10} - T_{20})$ и

$$\ln \frac{T_1 - T_{20}}{T_{10} - T_{20}} = - \frac{\alpha \cdot \frac{\lambda_{\kappa p}}{\delta_{\kappa p}}}{c_1 \rho_1 R_z (\alpha + \frac{\lambda_{\kappa p}}{\delta_{\kappa p}})} \cdot t.$$

Разрешив уравнение относительно t , находим

$$t = \frac{c_1 \rho_1 R_z (\alpha + \frac{\lambda_{\kappa p}}{\delta_{\kappa p}})}{\alpha \frac{\lambda_{\kappa p}}{\delta_{\kappa p}}} \cdot \ln \frac{T_{10} - T_{20}}{T_1 - T_{20}}.$$

При $t=t_1$ (конец первого этапа) $T_{\kappa}=T_{н.ж.}$, из выражения (5.19) находим, что

$$T_1(t=t_1) = T_{н.ж} \left(1 + \frac{\lambda_{кр}}{\alpha \delta_{кр}}\right) - \frac{T_{20} \lambda_{кр}}{\alpha \delta_{кр}} \text{ и}$$

$$T_1(t=t_1) - T_{20} = (T_{н.ж} - T_{20}) \left(1 + \frac{\lambda_{кр}}{\alpha \delta_{кр}}\right).$$

С учетом этого получаем

$$t_1 = \frac{c_1 \rho_1 R_z \left(1 + \frac{\lambda_{кр}}{\alpha \delta_{кр}}\right)}{\frac{\lambda_{кр}}{\delta_{кр}}} \ln \left[\frac{T_{10} - T_{20}}{(T_{н.ж} - T_{20}) \left(1 + \frac{\lambda_{кр}}{\alpha \delta_{кр}}\right)} \right]. \quad (5.20)$$

Коэффициент теплоотдачи α можно рассчитать по формуле $\alpha = 5,2 \frac{\lambda}{4R_z}$, где R_z – гидравлический радиус канала.

Если температура на входе в канал

$$T_{10} \leq T_{20} + (T_{н.ж} - T_{20}) \left(1 + \frac{\lambda_{кр}}{\alpha \delta_{кр}}\right), \quad (5.21)$$

то первый этап течения отсутствует, так как в данном случае на границе головной части потока с кокильной краской на поверхности канала сразу устанавливается температура $T_k = T_{н.ж}$.

Длительность течения на втором этапе можно определить, решив уравнение (5.18) при $T_k = T_{н.ж}$ и начальном условии при $t=t_1$:

$$T_1 = T_{20} + (T_{н.ж} - T_{20}) \left(1 + \frac{\lambda_{кр}}{\alpha \delta_{кр}}\right).$$

После преобразований получаем следующую формулу:

$$t = \frac{c_1 \rho_1 R_z}{\alpha} \ln \left[\frac{(T_{н.ж} - T_{20}) \cdot \lambda_{кр}}{(T_1 - T_{н.ж}) \cdot \alpha \delta_{кр}} \right].$$

При $t=t_2$ $T_1=T_n$, с учетом этого

$$t_2 = \frac{c_1 \rho_1 R_z}{\alpha} \ln \left[\frac{(T_{н.эс} - T_{20}) \cdot \lambda_{кр}}{(T_n - T_{н.эс}) \cdot \alpha \delta_{кр}} \right]. \quad (5.22)$$

Если температура на входе в канал T_{10} удовлетворяет условию (5.21), то, как было сказано выше, первый этап отсутствует ($t_1=0$), а для расчета t_2 справедлива формула

$$t_2 = \frac{c_1 \rho_1 R_z}{\alpha} \ln \frac{T_{10} - T_{н.эс}}{T_n - T_{н.эс}}. \quad (5.23)$$

Сумма длительностей первых двух этапов (t_1+t_2) определяет продолжительность течения сплава до снятия перегрева в головке потока над температурой ликвидуса. Длительность течения без перегрева, т.е. на третьем этапе t_3 , зависит при прочих равных условиях от механизма остановки потока.

Если течение останавливается за счет перехвата поперечного сечения потока растущими на стенках канала корочками затвердевшего сплава, то величину t_3 найдем как время, необходимое для затвердевания на стенках канала критической доли твердой фазы N .

В соответствии с формулой (2.218) время полного затвердевания сечения потока составит $t_{затв} = \frac{R_z^2 \mu_1 \mu_2}{m^2}$. Время затвердевания массовой доли сплава в сечении, равной N , составит $t_3 = t_{затв} \cdot N^2$. С учетом этого получаем

$$t_3 = \left(\frac{R_z \cdot N}{m} \right)^2 \cdot \mu_1 \cdot \mu_2, \quad (5.24)$$

где μ_1 – коэффициент, зависящий от конфигурации поперечного сечения канала [7];

$\mu_2=1$ при литье в песчаные формы;

$\mu_2=1+2 \frac{\delta_{кр} \lambda_1}{\lambda_{кр} R_z}$ при литье в кокиль.

При течении широкоинтервальных сплавов, когда поток останавливается из-за потери подвижности головного элемента при снижении его температуры до уровня температуры нулевой жидкотекучести, длительность третьего этапа течения найдем, решая уравнение (5.18) при $T_k=T_{н.эс}$

и начальном условии $T_1 = T_d$ при $t=0$. В результате получим следующее уравнение:

$$t = \frac{c_{эфф} \cdot \rho_{ж-т} R_z}{\alpha} \ln \frac{T_d - T_{н.жс}}{T_1 - T_{н.жс}}, \quad (5.25)$$

где $c_{эфф} = c_{ж-т} + \frac{Q_{кр}}{T_d - T_c}$.

В данном уравнении учтено, что на третьем этапе охлаждение сплава сопровождается выделением теплоты кристаллизации $Q_{кр}$.

Величину $T_{н.жс}$ в уравнении (5.25), как и в формулах (5.13), (5.16), (5.17), (5.20), (5.22) и (5.23), следует вычислять по формуле (5.8).

Как видно из (5.8), величина $T_{н.жс}$ зависит от радиуса канала R . Способность к течению при увеличении T_3 прежде всего теряют центральные слои потока. Примем, что качественное течение в третьем периоде в данном случае прекращается при средней температуре головной части потока

$T_1 = T'_{н.жс}$, где $T'_{н.жс}$ — температура нулевой жидкотекучести, усредненная по всему поперечному сечению. Величину $T'_{н.жс}$ найдем по формуле

$$T'_{н.жс} = \frac{T_{н.жс}(R = R_z) + T_{н.жс}(R = 0)}{2}.$$

Из формулы (5.8) следует, что $T_{н.жс}(R = R_z) = T_d - \left(\frac{R_z}{B} \cdot \frac{\Delta P}{\Delta x}\right)^{1/n}$ и $T_{н.жс}(R = 0) = T_d$. С учетом этого получаем

$$T'_{н.жс} = T_d - \frac{1}{2} \left(\frac{R_z}{B} \cdot \frac{\Delta P}{\Delta x}\right)^{1/n}. \quad (5.26)$$

В момент остановки потока, т.е. при $t=t_3$ $T_1 = T'_{н.жс}$. Поэтому из уравнения (5.25) находим

$$t_3 = \frac{c_{эфф} \cdot \rho_{ж-т} R_z}{\alpha} \ln \frac{T_d - T_{н.жс}}{T'_{н.жс} - T_{н.жс}}. \quad (5.27)$$

Максимально допустимую продолжительность заполнения полости формы постоянного поперечного сечения можно найти по следующей

формуле с использованием полученных выше выражений для расчета длительностей отдельных этапов течения:

$$t_{\max} = t_1 + t_2 + t_3. \quad (5.28)$$

2.3. Гидродинамические особенности заполнения форм сплавом

Рассмотрим закономерности заполнения сплавом цилиндрического канала в литейной форме (рис. 5.13). Если абстрагироваться от процессов выделения твердой фазы в потоке сплава, то для расчета кинетики заполнения канала можно применить уравнение Бернулли для неустановившегося режима. Напишем это уравнение для двух сечений: 0-0 и 1-1.

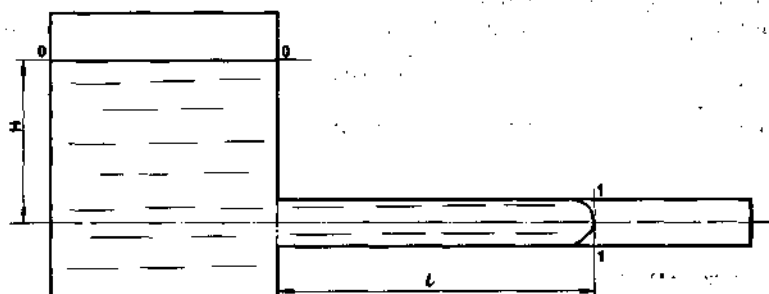


Рис. 5.13. Заполнение цилиндрического канала сплавом при $H = \text{const}$

$$\frac{v_0^2}{2g} + H = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{H}{g} \cdot \frac{dv_0}{dt} + \frac{l}{g} \cdot \frac{dv_1}{dt} + \zeta_{\text{кр}} \frac{v_1^2}{2g} + \lambda_1 \frac{l}{D} \cdot \frac{v_1^2}{2g} + \lambda_0 \frac{H}{D_0} \cdot \frac{v_0^2}{2g}.$$

Так как $v_0 \ll v_1$, то членами $\frac{v_0^2}{2g}$, $\frac{H}{g} \cdot \frac{dv_0}{dt}$ и $\lambda_0 \frac{H}{D_0} \cdot \frac{v_0^2}{2g}$ пренебрегаем. После преобразований уравнение Бернулли приобретает вид

$$\frac{dv_1}{dt} + \frac{v_1^2}{2l} (1 + \zeta_{\text{кр}} + \lambda_1 \frac{l}{D}) = \frac{gH}{l}, \text{ так как } \frac{dv_1}{dt} = \frac{dv_1}{dl} \cdot \frac{dl}{dt} = v_1 \frac{dv_1}{dl}, \frac{dl}{dt} = v_1.$$

С учетом этого имеем

$$\frac{dv_1}{dl} + \frac{v_1}{2l} (1 + \zeta_{ex} + \lambda_1 \frac{l}{D}) = \frac{gH}{l} \cdot \frac{1}{v_1}. \quad (5.29)$$

В общем виде решение этого уравнения можно записать так:

$$v_1 = \sqrt{2gH} \cdot \sqrt{\frac{1}{1 + \zeta_{ex} + \lambda \frac{l}{D}}} \cdot K(l, \zeta_{ex}, \frac{\lambda}{D}) = \varphi_{неуст} \cdot \sqrt{2gH},$$

где $K(l, \zeta_{ex}, \frac{\lambda}{D})$ – коэффициент, учитывающий влияние инерционности движения на изменение скорости v_1 ;

$$\varphi_{неуст} = \frac{K}{\sqrt{1 + \lambda_{ex} + \lambda \frac{l}{D}}} - \text{коэффициент скорости при неустановившемся движении.}$$

Если пренебречь инерционным напором, т.е. принять $\frac{dv_1}{dt} = 0$, то из уравнения (5.29) получим следующую формулу для вычисления v_1 :

$$v_1 = \varphi \sqrt{2gH}, \quad (5.30)$$

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda_{ex} + \lambda_1 \frac{l}{D}}}, \quad (5.31)$$

где φ – коэффициент скорости при установившемся движении.

На рис. 5.14 отражен характер изменения коэффициента скорости при заполнении канала. Видно, что коэффициенты φ и $\varphi_{неуст}$ существенно отличаются только в начале заполнения. Поэтому погрешность расчетов по формулам (5.30) и (5.31) невелика. Это является обоснованием применения в практике гидравлических расчетов заполнения формы при обычных методах литья уравнения Бернулли для установившегося потока.

Запишем уравнение (5.30) в виде

$$\frac{dl}{dt} = \frac{\sqrt{2gH}}{\sqrt{1 + \zeta_{ex} + \lambda_1 \frac{l}{D}}}$$

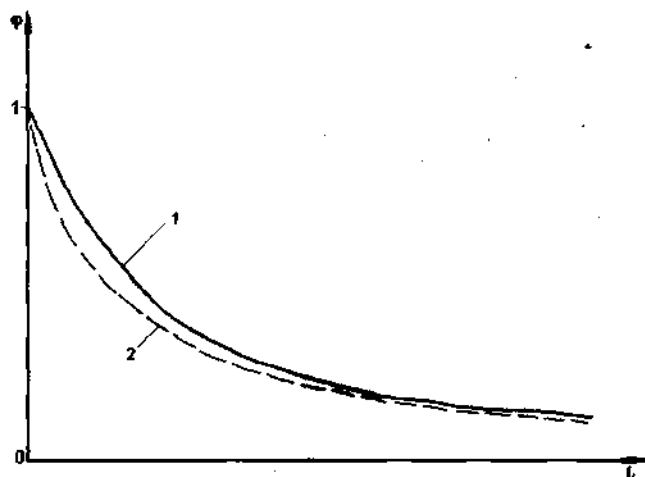


Рис. 5.14. Характер изменения коэффициента скорости с учетом (1) и без учета (2) инерционного напора

Разделив переменные и выполнив интегрирование при начальном условии $l=0$ при $t=0$, получим следующий закон продвижения головы потока по каналу:

$$l = \frac{D}{\lambda_1} \left\{ \left[\left(\frac{3\lambda_1}{2D} \cdot \sqrt{2gH} \cdot t + (1 + \zeta_{ex})^{3/2} \right)^{2/3} - (1 + \zeta_{ex}) \right] \right\}. \quad (5.32)$$

До сих пор мы рассматривали чисто гидравлические аспекты заполнения без учета влияния кристаллизации сплава.

При движении чистых металлов и узкоинтервальных сплавов на стенках канала, начиная со второго этапа движения, намерзает твердая корка, профиль которой показан на рис. 5.10. Особенно интенсивно она растет на третьем этапе течения, где голова потока движется без перегрева.

При этом уменьшается размер проходного сечения канала, что приводит к увеличению потерь напора на трение.

$$h_{\text{ном}} = \int_0^l \frac{\lambda \cdot D^4 dl}{D^5(l)} \cdot \frac{v_1^2}{2g},$$

где v_1 – скорость движения головы потока;

$D(l)$ – диаметр проходной части потока как функция расстояния от входа в канал;

D – диаметр канала.

Очевидно, что уменьшение $D(l)$ приводит к увеличению потерь напора.

На рис. 5.15 приведены значения коэффициента скорости φ , полученные путем расчета по формуле (5.31) и определенные в экспериментах по заполнению каналов технически чистыми металлами.

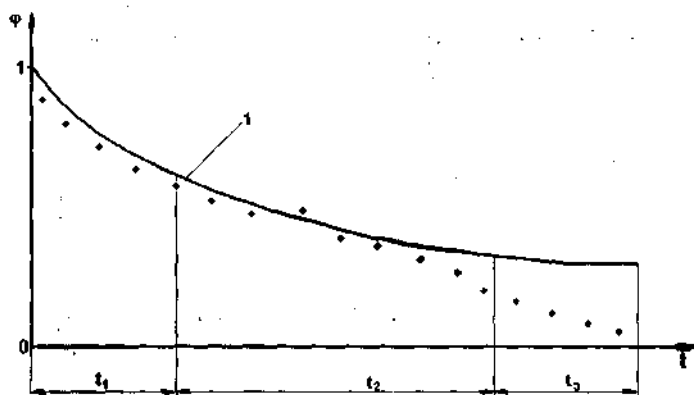


Рис. 5.15. Характер изменения коэффициента скорости при заполнении канала жидким алюминием:
1 – расчет по формуле (5.31); точками отмечены экспериментальные данные

Видно, что с конца второго этапа течения коэффициент скорости начинает резко снижаться, существенно отклоняясь от данных, полученных путем расчета по формуле (5.31), выведенной на основе чисто гидравлических соображений.

При течении широкоинтервальных объемно затвердевающих сплавов не происходит существенного роста затвердевшей корки на стенках канала на всех этапах течения. Поэтому формулы (5.30)–(5.32) достаточно точно описывают кинетику заполнения в данном случае вплоть до моментов, непосредственно предшествующих остановке потока.

2.4. Характер изменения температуры в потоке сплава

Так как течение сплава без перегрева при обычных методах литья без приложения повышенных давлений не обеспечивает качественного заполнения форм, особенно с точки зрения четкого воспроизведения ее конфигурации, заполнение формы, как правило, должно закончиться в пределах второго этапа. Рассмотрим элемент формы толщиной dx , находящийся на расстоянии от входа в канал, равном x , и на расстоянии от головы потока, в данный момент равном Z (рис. 5.16).

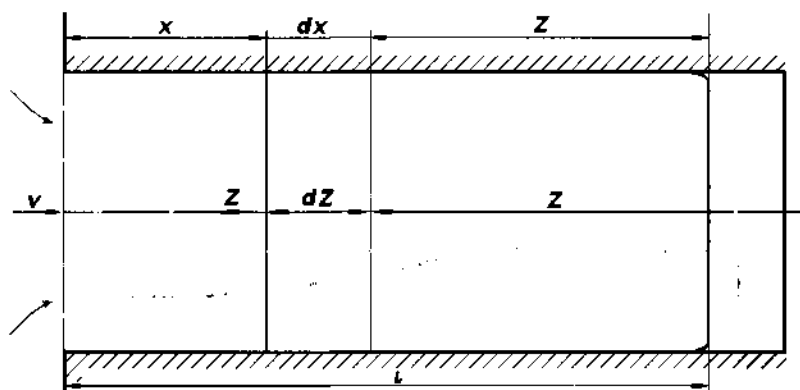


Рис. 5.16. Схема к расчету изменения температуры в потоке сплава

Примем, что температура сплава на входе в канал поддерживается постоянной и равной T_{10} . Течение осуществляется на первом этапе при $v = \text{const}$.

Элемент сплава толщиной dz , расположенный на расстоянии Z от головы потока, в процессе течения все время набегает на участки формы, находящиеся в тепловом взаимодействии с расплавом в течение времени

$\eta = \frac{Z}{v}$. Для оценки количества тепла, передаваемого в стенку формы, примем формулу

$$q = \frac{b_2}{\sqrt{\pi \cdot \eta}} (T_k - T_{20}),$$

где η – время с начала теплового взаимодействия.

Для элемента с фиксированным расстоянием Z от головы потока количество тепла будет равно

$$q = \frac{b_2}{\sqrt{\pi \cdot \frac{Z}{v}}} (T_k - T_{20}).$$

Нетрудно увидеть, что для головы потока, т.е. при $Z=0$, данная формула приводит к $q \rightarrow \infty$.

При выводе формулы (5.11) для головы потока было принято, что температура на границе головной части потока с формой (T_k) для первого этапа вычисляется по формуле (5.9). Для определения T_k можно написать следующее уравнение:

$$\frac{b_2}{\sqrt{\pi \cdot \eta_0}} (T_k - T_{20}) = \alpha (T_1 - T_k),$$

где η_0 – время, соответствующее продолжительности теплового взаимодействия с формой головного элемента потока.

Если бы движение было стержневым, при котором расплав движется как стержень, то $\eta_0=0$. Фактически при набегании головы потока на стенку формы происходит растекание сплава по ней в течение некоторого эффективного времени η_0 .

Решая приведенное уравнение относительно T_k , находим

$$T_k = \frac{\frac{b_2}{\sqrt{\pi \cdot \eta_0}} T_{20} + \alpha T_1}{\frac{b_2}{\sqrt{\pi \cdot \eta_0}} + \alpha}, \text{ или}$$

$$T_{\kappa} = T_{20} + \frac{\alpha}{\frac{b_2}{\sqrt{\pi \cdot \eta_0}} + \alpha} (T_1 - T_{20}). \quad (5.33)$$

Сравнивая выражение (5.33) с формулой (5.9), получаем

$$\frac{\alpha}{\frac{b_2}{\sqrt{\pi \cdot \eta_0}} + \alpha} = \frac{b_1}{b_2 + b_1}.$$

Выполнение этого равенства возможно при условии

$$b_1 = \alpha \sqrt{\pi \cdot \eta_0}, \text{ или } \eta_0 = \frac{b_1^2}{\alpha^2 \cdot \pi}. \quad (5.34)$$

Для сечения потока, отстоящего от головы на расстояние Z , уравнение теплового баланса имеет вид

$$\frac{b_2(T_{\kappa} - T_{20})}{\sqrt{\pi(\eta_0 + \eta)}} = \alpha(T_1 - T_{\kappa}).$$

Из этого уравнения находим

$$T_{\kappa}(Z) = T_{20} + \frac{\alpha(T_1 - T_{20})}{\frac{b_2}{\sqrt{\pi(\eta_0 + \eta)}} + \alpha}. \quad (5.35)$$

Напишем уравнение теплового баланса для элемента потока, находящегося при своем движении на расстоянии Z от головы потока.

$$c_1 \rho_1 S \cdot dZ \cdot dT_1 = -\alpha(T_1 - T_{\kappa}) \cdot \chi \cdot dZ \cdot dt,$$

где χ – смоченный периметр потока.

С учетом выражений (5.34) и (5.35) после разделения переменных имеем

$$\frac{dT_1}{T_1 - T_{20}} = - \frac{\alpha \cdot b_2 \cdot dt}{c_1 \rho_1 R_2 (b_2 + \alpha \sqrt{\pi(\eta_0 + \eta)})}, \text{ или}$$

$$\frac{dT_1}{T_1 - T_{20}} = - \frac{\alpha \cdot b_2 \cdot dt}{c_1 \rho_1 R_2 (b_2 + \alpha \sqrt{\pi(\frac{b_1^2}{\pi \cdot \alpha^2} + \eta)})}$$

Очевидно, что при $t = \eta = \frac{Z}{v}$ рассматриваемый элемент потока находится на входе в канал. Интегрируя уравнение при данном начальном условии, после преобразований получаем

$$\ln \frac{T_1 - T_{20}}{T_{10} - T_{20}} = - \frac{\alpha \cdot b_2 (t - \frac{Z}{v})}{c_1 \rho_1 R_2 (b_2 + \alpha \sqrt{\pi(\frac{b_1^2}{\pi \cdot \alpha^2} + \frac{Z}{v})})}. \quad (5.36)$$

В неподвижной системе координат (см. рис. 5.16) координату Z можно связать с неподвижной координатой x уравнением $Z = vt - x$. С учетом этого уравнение (5.36) записываем в виде

$$\ln \frac{T_1 - T_{20}}{T_{10} - T_{20}} = - \frac{\alpha \cdot b_2 \cdot x}{c_1 \rho_1 R_2 \cdot v \cdot (b_2 + \alpha \sqrt{\pi(\frac{b_1^2}{\pi \cdot \alpha^2} + t - \frac{x}{v})})};$$

$$T_1 = T_{20} + (T_{10} - T_{20}) \cdot \exp\left[- \frac{\alpha \cdot b_2 \cdot x}{c_1 \rho_1 R_2 \cdot v \cdot (b_2 + \alpha \sqrt{\pi(\frac{b_1^2}{\pi \cdot \alpha^2} + t - \frac{x}{v})})}\right]. \quad (5.37)$$

При $x=vt$ формула (5.37) описывает изменение температуры головы потока при течении на первом этапе.

В соответствии с формулой (5.37) при фиксированном x с течением времени в процессе течения температура сплава повышается и при $t \rightarrow \infty$ достигает $T_1 = T_{10}$. В каждый фиксированный момент времени температура сплава в потоке уменьшается с ростом x , т.е. по мере удаления от входа в

канал. Характер изменения температуры сплава в потоке со временем для трех сечений, отстоящих на разные расстояния от входа в канал, показан на рис. 5.17. Видно, что в каждом фиксированном сечении потока в процессе движения расплава температура повышается. Это оказывает существенное влияние на заполняемость реальных форм.

Рассмотрим заполнение двух полостей форм: для получения плоской отливки постоянного по высоте поперечного сечения (рис. 5.18, а) и для получения плоской отливки, имеющей на расстоянии h_1 от низа горизонтальную полку (рис. 5.18, б).

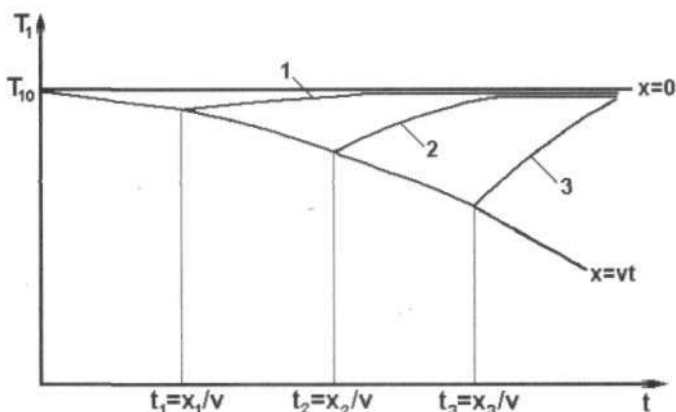


Рис. 5.17. Характер изменения температуры сплава в потоке со временем на разных расстояниях от входа в канал:
1 – $x_1 < x_2$; 2 – $x_2 < x_3$; 3 – $x_3 > x_2$

Максимально допустимую продолжительность заполнения простейшей полости формы (см. рис. 5.18, а) $t_{\max}$ можно рассчитать по приведенным выше формулам. Она определяется одной геометрической характеристикой отливки – гидравлическим радиусом полости формы R_c , который численно равен приведенной толщине стенки отливки R_{np} .

Наличие ответвлений от основного потока в различные горизонтальные протяженные элементы (полки, бобышки и т.п.) увеличивает значение $t_{\max}$ и заполняемость форм. При подходе головы потока к уровню $x=h_1$ начинается перетекание холодного расплава головных элементов потока в горизонтальные ответвления. При этом подъем расплава в вертикальном направлении прекращается до заполнения ответвлений в течение некоторого времени t_2 . Так как в соответствии с формулой (5.37) в фиксированном сечении ($x=h_1$) температура сплава за время t_2 увеличивается, то верх-

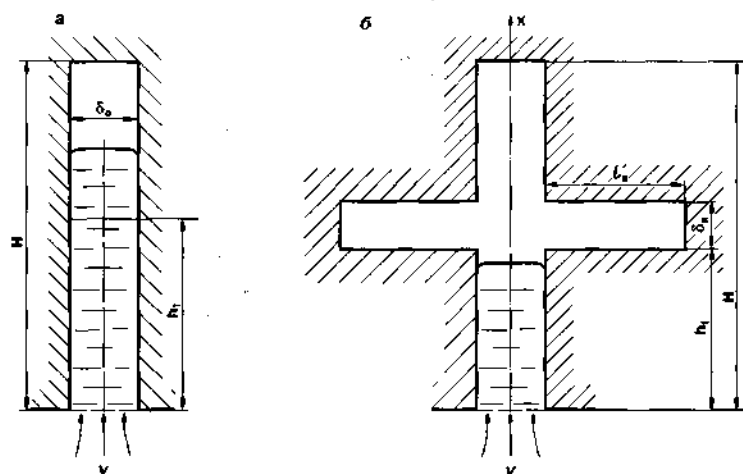


Рис. 5.18. Полость формы постоянного по высоте поперечного сечения (а) и с горизонтальной полкой (б)

няя часть отливки начнет заполняться при большей температуре на входе в нее, чем при отсутствии ответвлений. Поэтому максимальная продолжительность заполнения верхнего участка формы ($x > h_1$), будет больше для формы с ответвлениями (см. рис. 5.18, б), чем без ответвлений.

Так как время заполнения ответвлений t_2 будет тем больше, чем больше их масса, то максимальная продолжительность заливки формы должна определяться не только толщиной стенки отливки, но и ее массой.

Указанные соображения были использованы Б.В. Рабиновичем для объяснения физической сущности эмпирических формул для расчета оптимальной продолжительности заливки, имеющих вид

$$t_{opt} = S_1 \cdot \delta^n \cdot G^m, \quad (5.38)$$

где S_1 – коэффициент продолжительности заливки, учитывающий тип и состав сплава, теплофизические условия литья;

δ – преобладающая толщина стенки отливки, $\delta = 2R_{np}$;

G – масса жидкого металла, залитого в форму в расчете на одну отливку;

m и n – эмпирические показатели степени, например в формуле Г.М. Дубицкого $n=m=1/3$.

Более подробно вопрос об определении оптимальной продолжительности заливки рассматривается в курсе «Технология литейного производства».

Глава 3. ЖИДКОТЕКУЧЕСТЬ МЕТАЛЛОВ И СПЛАВОВ. ЗАПОЛНЯЕМОСТЬ ФОРМ

Способность сплавов заполнять форму, характеризуемая длиной (L_m) заполненного в стандартных условиях канала стандартных размеров, называется жидкотекучестью.

Жидкотекучесть – важнейшее литейное свойство металла или сплава. Для исследования жидкотекучести сплавов применяют различные пробы, наиболее распространенными из которых являются спиральная и прутковая. Схема прутковой пробы приведена на рис. 5.19.

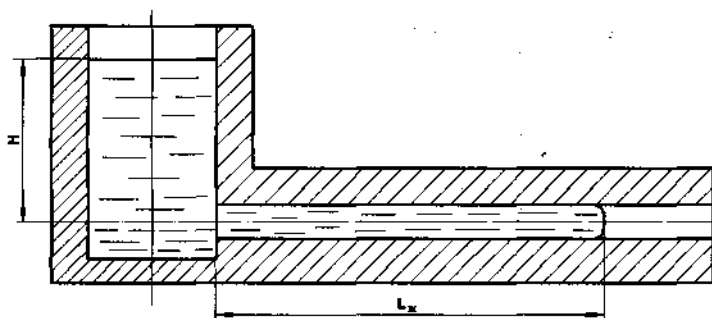


Рис. 5.19. Схема прутковой пробы на жидкотекучесть

Цилиндрический канал диаметром 5 или 10 мм, выполненный в песчаной или металлической форме, заполняется исследуемым металлом или сплавом при постоянном уровне H в резервуаре.

Прутковая проба при исследовании сплавов, обладающих высокой жидкотекучестью, имеет значительные габариты. Более компактной является спиральная проба, в которой канал, чаще всего трапециевидного сечения, свернут в спираль (рис. 5.20). Прутковую пробу чаще всего применяют для исследования жидкотекучести цветных сплавов, а спиральную – для исследования жидкотекучести чугуна. В зависимости от температурных условий различают сравнение сплавов по значениям их практической и истинной жидкотекучести.

Практическая жидкотекучесть определяется при одинаковой для сплавов данной системы температуре заливки.

На рис. 5.21, а приведена диаграмма состояния сплавов с эвтектическим превращением. При определении практической жидкотекучести температура заливки для всех сплавов системы равна $T_{зал}$. Как видно на

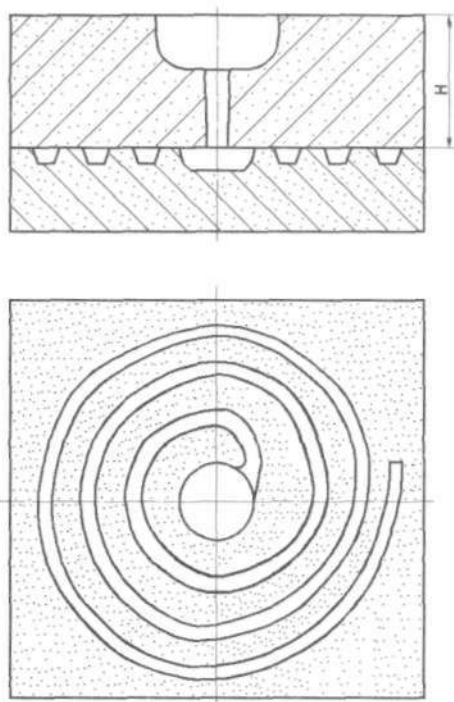


Рис. 5.20. Схема спиральной пробы на жидкотекучесть

рис. 5.21, а, сплавы разного состава с теплофизической точки зрения находятся в разных условиях. При переходе от чистого металла *A* к сплаву эвтектического состава (состав 2) перегрев над линией ликвидуса увеличивается, а при переходе от сплава состава 2 к чистому металлу *B* перегрев уменьшается.

Наибольший перегрев имеет сплав строго эвтектического состава. Так как максимальная продолжительность течения сплава увеличивается с ростом перегрева над температурой ликвидуса, то практическая жидкотекучесть не характеризует истинную способность сплава заполнять форму.

Если температуру заливки различных сплавов при испытании их на жидкотекучесть выбирать таким образом, чтобы был обеспечен одинаковый их перегрев над линией ликвидуса (температура заливки $T_{зал2}$ на рис.

5.21, а), то сравнение сплавов будет осуществляться по их истинной жидкотекучести.

Более строго при этом следовало бы обеспечить одинаковый перегрев над температурой нулевой жидкотекучести $T_{н.жс}$ (на рис. 5.21, а она показана штрихами). Однако положение линии нулевой жидкотекучести зависит от перепада давлений при литье и, как правило, неизвестно. Поэтому на практике при исследовании истинной жидкотекучести обеспечивают одинаковый перегрев над линией ликвидуса.

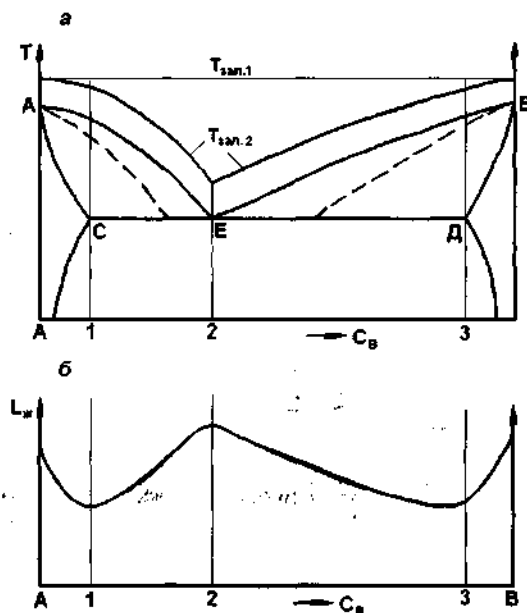


Рис. 5.21. Диаграмма состояния (а) и зависимость истинной жидкотекучести от состава сплава (б)

Величина жидкотекучести в первом приближении может быть рассчитана по формуле

$$L_{жс} = v \cdot t_{\max},$$

где v – скорость движения сплава;

$t_{\max}$ – максимально допустимая продолжительность течения, определяемая по формулам, полученным выше.

С учетом выражения (5.30) для вычисления скорости получаем

$$L_{\text{ж}} = \varphi \cdot \sqrt{2gH} \cdot t_{\max}, \quad (5.39)$$

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_{\text{вх}} + \lambda \frac{L_{\text{ж}}}{D}}}.$$

Так как величина $L_{\text{ж}}$ входит в значение φ , то по формуле (5.39) жидкотекучесть можно рассчитать каким-либо численным методом, например методом последовательных приближений. Формулу (5.39) можно признать достаточно строгой лишь для широкоинтервальных объемно затвердевающих сплавов.

При течении чистых металлов и последовательно затвердевающих сплавов, как было сказано выше, нарастающая на втором этапе течения затвердевающая корка резко уменьшает коэффициент скорости φ , поэтому в данном случае формула (5.39) дает завышенные результаты.

При одинаковых теплофизических условиях жидкотекучесть сплава определяется характером его кристаллизации. С увеличением интервала кристаллизации возрастает склонность сплава к объемному затвердеванию и уменьшается массовая доля твердой фазы в голове потока, при которой останавливается течение. Поэтому с увеличением интервала кристаллизации истинная жидкотекучесть уменьшается. Как показано на рис. 5.21, б, максимальной жидкотекучестью обладают чистые металлы и эвтектики, минимальной – сплавы составов 1 и 3, имеющие самые большие интервалы кристаллизации в системе.

Вопросы жидкотекучести различных сплавов подробно рассматриваются в технологических разделах спецкурса.

В отличие от жидкотекучести заполняемость форм, характеризующая способность сплава заполнять данную конкретную форму, определяется не только свойствами сплава и тепловыми условиями литья, но и характеристиками литейной формы. При этом существенную роль играет применяемый метод литья.

Количественной характеристикой заполняемости может служить максимально допустимая продолжительность заполнения данной формы $t_{\max}$. Например, если для отливки высотой H известно значение $t_{\max}$, то не-

обходимая минимальная скорость заливки будет равна $v_{\text{ср мин}} = \frac{H}{t_{\max}}$. Для

того чтобы получить качественную отливку, необходимо обеспечить скорость заливки, удовлетворяющую условию: $v_{зал} > v_{ср\ min}$.

Для каждого метода литья в конкретных условиях литейной формы существует определенный диапазон скоростей заливки, которые могут быть реализованы на практике. С увеличением скорости заливки нарушается плавность поступления сплава из питателей в форму. При этом может происходить интенсивное фонтанирование как в открытое пространство полости формы, так и под затопленный уровень после подъема уровня сплава в форме выше уровня питателей. Эти явления могут приводить к вспениванию и окислению сплава, а также к захвату газов и образованию газовых раковин и пор в отливке.

Поэтому скорость и продолжительность заливки для обеспечения качественного заполнения форм не должны выходить за некоторые допустимые пределы, т.е. необходимо выполнение условий:

$$t_{min} \leq t_{зал} \leq t_{max}, \quad v_{min} \leq v_{зал} \leq v_{max}. \quad (5.40)$$

Продолжительность заливки, удовлетворяющая этим условиям, называется оптимальной. Чем шире диапазон значений $t_{зал}$, равный $(t_{max} - t_{min})$, тем больше технологические возможности данного метода литья и выше технологичность данного сплава.

Инженерные методы расчета величин t_{max} и t_{min} рассматриваются в курсе «Технология литейного производства».

В заключение рассмотрим некоторые примеры расчета тепловых и гидродинамических параметров заливки форм.

Глава 4. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ ТЕПЛОВЫХ И ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ЗАЛИВКИ ПРОСТЕЙШИХ ФОРМ

Пример 1. Требуется рассчитать максимальную продолжительность и минимальную скорость заполнения формы, изображенной на рис. 5.18, а, алюминиевым сплавом АК7ч при следующих исходных данных: толщина стенки отливки $\delta=1$ см, $R_z=0,5$ см; высота отливки $H=40$ см; ширина отливки $B=20$ см; $c_{ж-м}=1,18$ Дж/(г·К); $\rho_{ж-м}=2,35$ г/см³; $c_1=1,28$ Дж/(г·К); $\rho_1=2,2$ г/см³; $b_1=1,53$ Вт·с^{1/2}/(см·К); $b_2=0,15$ Вт·с^{1/2}/(см·К); $\lambda_1=0,83$ Вт/(см·К); $\nu=0,012$ см²/с; перепад давлений $\Delta P=0,235$ Н/см²; $n=2,1$; $T_s=610$ °С; $T_c=577$ °С; $T_{10}=750$ °С; $T_{20}=20$ °С; $B=3,6 \cdot 10^{-4}$ Н/(см²·К^{2,1}); $Q_{кр}=170$ Дж/г.

Максимально допустимую продолжительность заполнения вычислим по формуле $t_{\max}=t_1+t_2+t_3$. Для расчета длительностей течения на первом и втором этапах используем формулы (5.13) и (5.16).

Прежде всего, рассчитаем температуру нулевой жидкотекучести по формуле (5.8):

$$T_{н,ж} = 610 - \left(\frac{0,5 \cdot 0,235}{3,6 \cdot 10^{-4} \cdot 0,49} \right)^{1/2,1} = 610 - 2,72 = 607,28 \text{ °С};$$

$$T'_{н,ж} = \frac{610 + 607,28}{2} = 608,4 \text{ °С}.$$

Для вычисления коэффициента теплоотдачи от сплава к поверхности формы на начальном участке потока справедливо выражение [22]

$$Nu = \frac{\alpha D_z}{\lambda_1} = \frac{1}{L_{кр}} \int_0^{L_{кр}} 5,2 \left(\frac{L_{кр}}{x} \right)^{0,2} dx,$$

где $L_{кр}$ – длина участка стабилизации потока, $L_{кр}=0,6D_z \cdot Re^{0,25}$.

При $x > L_{кр}$ $Nu=5,2$.

Найдем среднее значение критерия Nu :

$$Nu_{cp} = \frac{1}{L_{кр}} \cdot \int_0^{L_{кр}} Nu(x) \cdot dx = \frac{1}{H} \int_0^H 5,2 \left(\frac{L_{кр}}{x} \right)^{0,2} \cdot dx;$$

$$L_{кр} = 0,6D_z \cdot Re^{0,25} = 0,6 \cdot 4R_z \cdot Re^{0,25} = 0,6 \cdot 4 \cdot 0,5 \cdot Re^{0,25}.$$

Обычно при заполнении формы Re находится в пределах 2000–4000.

Примем $Re=3000$, тогда $L_{кр} = 1,2 \cdot 3000^{0,25} = 8,4$ см.

$$Nu_{cp} = \frac{1}{8,4} \int_0^{8,4} 5,2 \cdot 8,4^{0,2} \frac{dx}{x^{0,2}} = 5,2 \cdot 8,4^{0,2} \cdot \frac{x^{0,8}}{8,4 \cdot 0,8} \Big|_0^{8,4} = \frac{5,2 \cdot 8,4^{0,2} \cdot 8,4^{0,8}}{8,4 \cdot 0,8} = 6,5.$$

При $x > 8,4$ см $Nu = 5,2$. Примем для первого этапа $Nu = 6,5$ и $\alpha = \frac{Nu \cdot \lambda_1}{D_c} = 6,5 \frac{0,83}{4 \cdot 0,5} = 2,7$ Вт/(см·К), а для второго и третьего этапов – $Nu = 5,2$ и $\alpha = 5,2 \frac{0,83}{2} = 2,16$ Вт/(см·К).

По формуле (5.13)

$$t_1 = \frac{(1,53 + 0,15) \cdot 1,28 \cdot 2,2 \cdot 0,5}{2,7 \cdot 0,15} = \ln \left[\frac{(750 - 20) \cdot 1,53}{(607,28 - 20) \cdot 1,68} \right] = 5,84 \ln 1,132 = 0,724 \text{ с.}$$

$$t_2 = \frac{1,28 \cdot 2,2 \cdot 0,5}{2,16} = \ln \left[\frac{(607,28 - 20) \cdot 0,15}{(610 - 607,28) \cdot 1,53} \right] = 0,652 \cdot \ln 21,17 = 2 \text{ с.}$$

$$t_3 = c_{эфф} \frac{2,35 \cdot 0,5}{2,16} \ln \frac{2,72}{1,12} = 0,544 c_{эфф} \cdot \ln 2,49.$$

$$c_{эфф} = c_{ж-м} + \frac{Q_{кр}}{T_d - T_c} = 1,18 + \frac{170}{610 - 577} = 6,33 \text{ Дж/(г·К)}.$$

$$t_3 = 0,544 \cdot 6,33 \cdot \ln 2,49 = 3,14 \text{ с.}$$

$$t_{\max} = t_1 + t_2 + t_3 = 0,724 + 2 + 3,14 = 5,864 \text{ с.}$$

$$v_{ср\min} = \frac{H}{t_{\max}} = \frac{40}{5,864} = 6,82 \text{ см/с.}$$

Пример 2. Найти максимальную продолжительность и минимальную скорость заливки формы, изображенной на рис. 5.18, б, при условиях, указанных в примере 1. Высота нижнего участка формы $h_1 = 20$ см, толщина стенки горизонтальной полки $\delta_n = 1,5$ см, а ее длина $l_n = 20$ см.

Продолжительность заполнения формы $t_{\max} = t_n + t_1 + t_2 + t_3$,

где $t_n = \frac{h_1}{v}$ – время заполнения нижней части формы (до полки);

t_n – время заполнения горизонтальной полки;

t_1 , t_2 и t_3 – длительность первого, второго и третьего этапов при заполнении верхней части полости формы.

Продолжительность заполнения полки определяется по формуле

$$t_n = \frac{V_n}{v_n \cdot S_{cm}},$$

где V_n – суммарный объем обеих полки, $V_n = 2\delta_n \cdot l_n \cdot B_o$;

S_{cm} – площадь поперечного сечения вертикальной стенки, $S_{cm} = \delta B_o$;

B_o – ширина отливки.

$$t_n = \frac{2\delta_n \cdot l_n \cdot B_o}{v \cdot \delta \cdot B_o} = \frac{2\delta_n \cdot l_n}{v \cdot \delta} = \frac{2 \cdot 1,5 \cdot 20}{v \cdot \delta} = \frac{60}{v}.$$

Скорость сплава в полках v_n найдем из условия неразрывности потока

$$Q_{cm} = Q_n,$$

где Q_{cm} – расход в вертикальной стенке, $Q_{cm} = v \cdot \delta \cdot B_o$;

Q_n – суммарный расход сплава в обеих полках, $Q_n = v_n \cdot 2\delta_n \cdot B_o$;

$$v \cdot \delta \cdot B_o = 2v_n \cdot 2\delta_n \cdot B_o, \text{ или } v_n = \frac{\delta}{2\delta_n} v = \frac{v}{2 \cdot 1,5} = \frac{v}{3}.$$

Очевидно, что время заполнения полки t_n должно удовлетворять условию $t_n \leq t_{1n} + t_{2n} + t_{3n}$, где t_{1n} , t_{2n} и t_{3n} – продолжительность течения сплава в полке на первом, втором и третьем этапах.

Найдем значение $T_{н.ж}$ и коэффициент теплоотдачи α при течении сплава в горизонтальной полке.

$$T_{н.ж} = 610 - \left(\frac{0,75 \cdot 0,235}{3,6 \cdot 10^{-4} \cdot 40} \right)^{1/2,1} = 606,7 \text{ } ^\circ\text{C};$$

$$T'_{н.ж} = \frac{610 + 606,7}{2} = 608,35 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

$$\text{Для первого этапа течения } \alpha_n = \frac{Nu \cdot \lambda_1}{D_{2,n}} = \frac{6,5 \cdot 0,83}{4 \cdot 0,75} = 1,8$$

$$\text{Вт/(см} \cdot \text{К)}; \text{ для второго этапа } \alpha_n = \frac{5,2 \cdot 0,83}{4 \cdot 0,75} = 1,44 \text{ Вт/(см} \cdot \text{К)}.$$

$$t_{1n} = \frac{(1,53 + 0,15)1,28 \cdot 2,2 \cdot 0,75}{1,8 \cdot 0,15} \ln \left[\frac{(T_{10}'' - 20)1,53}{(606,7 - 20)1,68} \right] =$$

$$= 13,14 [\ln(T_{10}'' - 20) - 6,468],$$

где T_{10}'' – температура головы потока в конце заполнения нижней части вертикальной стенки, т.е. при $t = t_n = \frac{20}{v}$.

Выше было показано, что продолжительность первого этапа $t_{1n}=0$, если $T_{10}'' \leq T_{20} + (T_{н.ж} - T_{20}) \frac{b_1 + b_2}{b_1}$ (см. формулу (5.14)), т.е. при

$$T_{10}'' \leq 20 + (606,7 - 20) \frac{1,68}{1,53} = 664,2 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

В примере 1 вычислено значение продолжительности первого этапа течения в вертикальной стенке $t_1=0,724$ с. Поэтому при $t_n = \frac{20}{v} > 0,724$, т.е. при $v < \frac{20}{0,724} = 27,2$ см/с, голова потока подойдет к уровню горизонтальных полок с температурой $T_{10}'' < 664,2 \text{ } ^\circ\text{C}$ так как данное значение температуры голова потока имела бы при $t_n=t_1=0,724$.

Скорость $v=27,2$ см/с очень велика. Поэтому при течении в полке $t_{1n}=0$. Значение t_{2n} найдем по формуле (5.17).

$$t_{2n} = \frac{c_1 \rho_1 \cdot R_n}{\alpha_n} \ln \frac{T_{10}'' - T_{н.ж}}{T_{л} - T_{н.ж}} = \frac{1,28 \cdot 2,2 \cdot 0,75}{1,44} \ln \frac{T_{10}'' - T_{н.ж}}{610 - 606,7} =$$

$$= 1,467 \ln(T_{10}'' - T_{н.ж}) - 1,751.$$

Так как T_{10}'' – температура головы потока в конце заполнения нижней части вертикальной стенки, т.е. при $t = t_n = \frac{20}{v}$, то найдем значение выражения $(T_{10}'' - T_{н.ж})$ из формулы (5.15).

$$\ln(T_{10}'' - T_{н.ж}) = \ln[(T_{н.ж} - T_{20}) \cdot \frac{b_2}{b_1}] - (\frac{\alpha(t_n - t_1) \cdot R_n}{c_1 \rho_1 \cdot R_c}) = \ln[(607,28 - 20) \frac{0,15}{1,53}] - 2,16 \frac{t_n - 0,724}{1,28 \cdot 2,2 \cdot 0,5} = 4,053 - 1,53 t_n + 1,11 = 5,163 - \frac{30,6}{v}.$$

С учетом этого получаем

$$t_{2n} = 1,467(5,163 - \frac{30,6}{v}) - 1,751 = 5,823 - \frac{44,89}{v}.$$

Величину продолжительности третьего этапа течения в полке найдем по формуле (5.25):

$$t_{3n} = \frac{6,33 \cdot 2,35 \cdot 0,75}{1,44} \ln \frac{610 - 606,7}{608,35 - 606,7} = 5,37 \text{ с.}$$

Значит, максимально допустимая продолжительность заполнения полки равна $t_{n\max} = 5,823 - \frac{44,89}{v} + 5,37 = 11,193 - \frac{44,89}{v}$.

Так как продолжительность заполнения полки при скорости движения сплава в вертикальной стенке v равна $t_n = \frac{20}{v_n} = \frac{60}{v}$, то имеем нера-

венство $\frac{60}{v} \leq 11,193 - \frac{44,89}{v}$, или $v \geq 9,37 \text{ см/с}$.

Таким образом, для качественного заполнения горизонтальных полок необходимо, чтобы скорость движения сплава была больше $9,37 \text{ см/с}$.

При этом время заливки нижней части формы $t_n \leq \frac{20,37}{9,37} = 2,13 \text{ с}$, гори-

зонтальных полок - $t_n \leq \frac{60}{9,37} = 6,4 \text{ с}$ и верхней части вертикальной стен-

ки - $t_s \leq \frac{20}{9,37} = 2,13 \text{ с}$, т.е. $t_{\text{зат}} = t_n + t_n + t_s \leq 2,13 + 6,4 + 2,13 = 10,66 \text{ с}$.

Найдем значение температуры сплава на входе в верхнюю часть вертикальной стенки T_{10} после заполнения полок по формуле (5.37) при $x=h_1$, $t=t_n$ и $v=9,37 \text{ см/с}$.

$$T'_{10} = T_{20} + (T_{10} - T_{20}) \exp\left[-\frac{\alpha \cdot b_2 h_1}{c_1 \rho_1 v R_z (b_2 + \alpha \sqrt{\pi(\frac{b_1^2}{\pi \alpha^2} + t_n - \frac{h_1}{v})})}\right].$$

$$\begin{aligned} \ln(T'_{10} - T_{20}) &= \ln(750 - 20) - \\ &\frac{2,16 \cdot 0,15 \cdot 20}{0,15 + 2,16 \sqrt{3,14(\frac{1,53^2}{3,14 \cdot 2,16^2} + \frac{60}{9,37} - \frac{20}{9,37})}} = \\ &= 6,59 - 0,062 = 6,528. \end{aligned}$$

Вычислим значения продолжительности течения сплава на первом, втором и третьем этапах в верхней части стенки. По формуле (5.13) получаем

$$\begin{aligned} t_1 &= 5,84 \ln[(T'_{10} - 20) \cdot \frac{1,53}{(607,28 - 20) \cdot 1,68}] = \\ &= 5,84 \ln[1,55 \cdot 10^{-3} (T'_{10} - 20)] = \\ &= 5,84 [\ln(1,55 \cdot 10^{-3}) + \ln(T'_{10} - 20)]. \end{aligned}$$

С учетом вычисленного выше значения $\ln(T'_{10} - T_{20})$ находим $t_1 = 5,84(-6,47 + 6,528) = 0,339$ с. Значения t_2 и t_3 равны соответствующим значениям t_2 и t_3 , полученным в примере 1, т.е. $t_2 = 2$ с и $t_3 = 3,14$ с.

Таким образом, максимально допустимая продолжительность течения сплава в верхней части стенки равна $0,339 + 2 + 3 + 3,14 = 5,479$ с.

При скорости заливки $v = 9,37$ см/с продолжительность заполнения верхней части стенки равна $t_a = \frac{20}{9,37} = 2,13 < 5,479$ с, поэтому заполняемость верхней части формы и всей формы при $v \geq 9,37$ см/с и $t_{зал} \leq 10,66$ с будет обеспечена.

Приведенные расчеты показывают, что заполняемость формы лимитируется заполнением не вертикальной стенки, а горизонтальных полок, так как скорость движения сплава в них в три раза меньше, чем в вертикальной стенке. Присоединение к стенке горизонтальных элементов привело к увеличению максимально допустимой продолжительности заливки с 5,864 с до 10,66 с и к повышению минимальной скорости заливки.

Выполним для сравнения расчет для обоих примеров по формуле Г.М. Дубицкого (5.38) $t_{\max} = S\sqrt[3]{\delta \cdot G}$. По его данным, для алюминиевых сплавов $S=2,2$ (для первого примера) и $S=2,4$ (для второго примера). Примем $\delta=10$ мм.

Тогда для первого примера

$$G = \rho_{\text{ме}} \cdot V_o \cdot g = 2,5\delta \cdot H \cdot B_o \cdot 980 = 2,5 \cdot 1 \cdot 40 \cdot 20 \cdot 980 = 2000 \text{ г} = 2 \text{ кг.}$$

$$t_{\max} = 2,2\sqrt[3]{10 \cdot 2} = 5,97.$$

Для второго примера

$$G = 2,5 \cdot (1 \cdot 40 + 1,5 \cdot 40) \cdot 20 \cdot 980 = 4900000 = 5000 \text{ г} = 5 \text{ кг.}$$

$$t_{\max} = 2,4\sqrt[3]{10 \cdot 5} = 8,9 \text{ с.}$$

Таким образом в первом случае результаты аналитического расчета и расчета по формуле Г.М. Дубицкого практически совпадают. Во втором случае расчет по формуле Г.М. Дубицкого привел к заниженному на 17% результату по сравнению с результатом аналитического расчета.

Контрольные вопросы и задания

1. Перечислите и обоснуйте основные особенности гидравлики металлических расплавов.
2. Как изменяются предельные касательные напряжения сдвига и структурная вязкость сплава при его охлаждении в интервале кристаллизации?
3. Каков характер эпюры скоростей по сечению потока бингамовой жидкости? Напишите и обоснуйте условие прекращения течения бингамовой жидкости.
4. Что такое температура нулевой жидкотекучести? Как ее рассчитать?
5. Дайте обоснование механизма остановки потока сплава.
6. Выведите формулу для расчета максимально допустимой продолжительности течения сплава в полости формы.
7. В процессе заливки формы через выходное сечение питателей непрерывно проходит жидкий сплав. Каков характер изменения его температуры в данном сечении?
8. Что такое жидкотекучесть сплавов?
9. Какие Вы знаете пробы для определения жидкотекучести сплавов?
10. Какова зависимость жидкотекучести от величины интервала кристаллизации сплава?
11. Напишите формулу для расчета жидкотекучести.
12. Что такое заполняемость формы?
13. Что такое оптимальная продолжительность заливки? Какие методы ее расчета Вы знаете?

14. В вариантах 1–15 для схемы, представленной на рис. 5.18, а, определите максимальную продолжительность заливки форм сплавом. Исходные данные для выполнения расчетов приведены в таблице.

Исходные данные

Но- мер вар.	Сплав	Мате- риал фор- мы	c_1 , $\frac{\text{Дж}}{\text{г}\cdot\text{К}}$	ρ_1 , $\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$	Характеристические данные								
					b_1	b_2	λ_1 , $\frac{\text{Вт}}{\text{см}\cdot\text{К}}$	δ , см	T_z , $^{\circ}\text{C}$	$T_{\text{сг}}$, $^{\circ}\text{C}$	$C_{\text{ж-м}}$, $\frac{\text{Дж}}{\text{г}\cdot\text{К}}$	$\rho_{\text{ж-м}}$, $\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$	$Q_{\text{сп}}$, $\frac{\text{Дж}}{\text{г}}$
					$\frac{\text{Вт}\cdot\text{с}^{1/2}}{\text{см}^2\cdot\text{К}}$								
1	Сталь	П	0,92	7,0	1,2	0,25	0,23	1,0	1497	1447	0,83	7,25	258
2	Al—Cu	П	1,20	2,7	1,8	0,15	1,02	1,0	630	507	1,10	2,95	350
3	AK7ч	П	1,28	2,2	1,5	0,15	0,83	1,0	610	577	1,18	2,35	170
4	Сталь	Ч	0,92	7,0	1,2	1,60	0,23	2,0	1497	1447	0,83	7,25	258
5	Al—Cu	Ч	1,20	2,7	1,8	1,30	1,02	2,0	630	507	1,10	2,95	350
6	AK7ч	Ч	1,28	2,2	1,5	1,30	0,83	2,0	610	577	1,18	2,35	170
7	Сталь	П	0,92	7,0	1,2	0,25	0,23	1,5	1497	1447	0,83	7,25	258
8	Al—Cu	П	1,20	2,7	1,8	0,15	1,02	1,5	630	507	1,10	2,95	350
9	AK7ч	П	1,28	2,2	1,5	0,15	0,83	1,5	610	577	1,18	2,35	170
10	Сталь	Ч	0,92	7,0	1,2	1,60	0,23	2,5	1497	1447	0,83	7,25	258
11	Al—Cu	Ч	1,20	2,7	1,8	1,30	1,02	2,5	630	507	1,10	2,95	350
12	AK7ч	Ч	1,28	2,2	1,5	1,30	0,83	2,5	610	577	1,18	2,35	170
13	Сталь	П	0,92	7,0	1,2	0,25	0,23	3,0	1497	1447	0,83	7,25	258
14	Al—Cu	П	1,20	2,7	1,8	0,15	1,02	3,0	630	507	1,10	2,95	350
15	AK7ч	П	1,28	2,2	1,5	0,15	0,83	3,0	610	577	1,18	2,35	170

Примечание. Обозначение материала форм: П – песчано-глинистая,
Ч – чугун

Перепад давлений на расплав во всех вариантах $\Delta P = 0,235 \text{ Н/см}^2$. Коэффициенты n и B в формуле (5.7) равны: для стали $B = 10^{-5} \text{ Н/(см}^2 \cdot \text{К}^{2,1})$, $n = 2,1$; для алюминиевых сплавов $B = 3,6 \cdot 10^{-4} \text{ Н/(см}^2 \cdot \text{К}^{2,1})$, $n = 2,1$. Ширина полости формы во всех вариантах равна 20 см. Температура заливки T_{10} в четных вариантах на 100 °С выше, а в нечетных вариантах на 200 °С выше температуры ликвидуса. Начальная температура песчаных форм во всех вариантах равна $T_{20} = 20$ °С; для металлических форм в четных вариантах $T_{20} = 200$ °С, а в нечетных вариантах $T_{20} = 300$ °С. Коэффициент теплопроводности кокильного покрытия $\lambda_{кр}$ при литье в металлические формы во всех вариантах равен 0,0050 Вт/(см·К). Толщина кокильного покрытия $\delta_{кр}$ в вариантах 4–5 равна 0,01 см, в вариантах 10–12 – 0,02 см.

Расчет коэффициента теплоотдачи α следует выполнить по формуле

$$Nu = 5,2 \text{ или } \alpha = 5,2 \frac{\lambda_1}{R_c}.$$

РАЗДЕЛ 6. ГАЗЫ И НЕМЕТАЛЛИЧЕСКИЕ ВКЛЮЧЕНИЯ В ОТЛИВКАХ

Подавляющее большинство металлургических и литейных процессов осуществляются в атмосферных условиях. Металлы и сплавы в процессе плавки и литья находятся в контакте с воздухом, газами печной атмосферы, футеровкой печи и стенками формы. По химическому составу контактирующие с расплавом газы можно разделить на три группы:

- простые двухатомные газы (H_2 , O_2 , N_2);
- газы-окислы (H_2O , SO_2 , CO_2 , CO , NO);
- другие сложные газы (NH_3 , H_2S , C_nH_m и т.п.).

Газы могут не только поступать в расплав из воздуха и печной атмосферы, но и образовываться вследствие химических реакций, протекающих при плавке сплавов и их охлаждении в литейной форме.

Всегда, за исключением использования азота в качестве легирующего элемента в некоторых марках стали, газы оказывают отрицательное воздействие на свойства сплавов в отливках и вызывают образование различных дефектов. Газы могут присутствовать в виде растворов, самостоятельных фаз (газовые поры и раковины), неметаллических включений.

Глава 1. ЗАКОНОМЕРНОСТИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ РАСПЛАВОВ С ГАЗАМИ

Прежде всего, рассмотрим термодинамические особенности процессов растворения газов в металлических сплавах. Азот, водород и кислород образуют в металлах растворы, близкие к идеальным бесконечно разбавленным растворам.

Химическое сродство металлов к водороду и азоту невелико. Поэтому равновесие этих газов с металлическими расплавами изучают непосредственно. Равновесие водорода и азота в газовой фазе и растворенных в металле можно описать реакциями



Константы равновесия этих реакций равны

$$K_H = a^2[H] / \alpha_{H_2} \text{ и } K_N = a^2[N] / \alpha_{N_2}.$$

Активность компонента газовой фазы численно равна его парциальному давлению, выраженному в атмосферах. Так как растворы водорода и

азота являются растворенными, их активности пропорциональны концентрациям. С учетом этого получаем закон Сиверта

$$[H] = K_H \sqrt{P_{H_2}}; \quad (6.1)$$

$$[N] = K_N \sqrt{P_{N_2}}, \quad (6.2)$$

где $[H]$ и $[N]$ – равновесные концентрации водорода и азота в металле;
 P_{H_2} и P_{N_2} – парциальные давления газов в газовой фазе.

Равновесные концентрации $[H]$ и $[N]$ при $P_{H_2} = P_{N_2} = 1$ атм (0,1 МПа) называются растворимостью газа в расплаве, которая численно равна константе равновесия в уравнениях (6.1) и (6.2).

Обычно растворимость газов в металле $[H]$ и $[N]$ выражают в см^3 на 100 г металла. Поэтому размерность величин K_H и $K_N - \text{см}^3/(\text{100 г атм}^{1/2})$.

$$\lg K_H = \lg \frac{[H]}{\sqrt{P_{H_2}}} = \frac{A}{T} + B.$$

Аналогично $\lg K_N = \lg \frac{[N]}{\sqrt{P_{N_2}}} = \frac{A}{T} + B$. Здесь A и B – коэффициенты,

зависящие от металла. Значения A и B для растворения водорода и азота в некоторых металлах приведены в табл. 6.1

Таблица 6.1
 Значения коэффициентов A и B для растворенных растворов
 водорода и азота в некоторых металлах

Металл	Фаза, состояние	Газ			
		Водород		Азот	
		A	B	A	B
Алюминий	Твердый	- 2080	0,788	-	-
	Жидкий	- 2500	2,530	-	-
Медь	Твердая	- 3050	2,540	-	-
	Жидкая	- 2380	2,490	-	-
Железо	α, δ	- 1420	1,725	- 1820	- 0,880
	γ	- 1390	1,869	656	- 2,090
	Жидкая	- 1730	2,362	- 524	- 1,078
Магний	Жидкий	- 631	2,390	-	-

Для величины K_H можно получить следующее выражение:

$$K_H = 10^{\left(\frac{A}{T} + B\right)}.$$

При давлении $P_{H_2} = 1$ атм величина K_H равна растворимости водорода в металле.

В табл. 6.2 приведены значения растворимости водорода в некоторых металлах в жидком и твердом состояниях при температуре кристаллизации и $P_{H_2} = 1$ атм.

Таблица 6.2

Значения растворимости водорода
в жидких и твердых металлах при $P_{H_2} = 1$ атм

Металл	$K_{Hж}$	$K_{Hтв}$	$K_{Hж}/(K_{Hж} + K_{Hтв})$
Алюминий	0,68	0,036	1,056
Медь	6,00	2,100	1,540
Магний	26,00	18,000	3,250
Железо	25,00	12,600	2,020

Растворимость водорода и азота увеличивается с ростом температуры как в твердом, так и в жидком металле. Исключение составляет только растворимость азота в γ -железе, которая уменьшается с возрастанием температуры. В точках фазовых переходов и при плавлении равновесные концентрации газов претерпевают скачкообразные изменения.

По величине отношения растворимостей водорода при температуре плавления в жидком $S_{ж}$ и твердом $S_{тв}$ состояниях металлы можно расположить в следующий ряд: Al ($\frac{S_{ж}}{S_{тв}} = 19,2$); Cu ($\frac{S_{ж}}{S_{тв}} = 3$);

Fe ($\frac{S_{ж}}{S_{тв}} = 1,8$); Ti ($\frac{S_{ж}}{S_{тв}} = 1,73$); Mg ($\frac{S_{ж}}{S_{тв}} = 1,3$).

Несмотря на то что растворимость водорода в алюминии невелика (при температуре плавления $S_{ж} = 0,69$ см³, а $S_{тв} = 0,036$ см³ на 100 г металла), вследствие очень большого скачка растворимости при затвердевании алюминиевые сплавы отличаются высокой склонностью к образованию газовой пористости.

Водород по отношению к металлам отличается низкой активностью, устойчивые гидриды не образуются. Наиболее вероятной формой водорода в растворе является ион H^+ . На этом основано, например, рафинирование алюминиевых сплавов постоянным током.

Взаимодействие азота с расплавами наиболее полно изучено в отношении железа и никеля. По отношению к другим металлам системные данные в литературе отсутствуют. Азот в хромо-марганцовистых и хромо-марганцево-никелевых сталях используют как легирующий компонент. Однако в основном азот понижает механические свойства сталей из-за нитридных неметаллических включений. Наиболее вероятной формой существования азота в металлических расплавах является N^{+3} . В чистом железе азот не образует нитриды. Образование нитридов типа Fe_2N или Fe_4N может происходить лишь в твердом металле.

Легирование стали может вызывать появление нитридов. При содержании бора более 5–6% возникают нитриды бора. Нитрид алюминия AlN образуется при содержании алюминия более 1 %. При содержании ванадия более 5 % появляется нитрид ванадия.

Легирующие компоненты, содержащиеся в сплавах, оказывают влияние на растворимость водорода и азота. Титан, ниобий, ванадий, марганец, хром, образующие с водородом прочные гидриды, увеличивают растворимость водорода в железе. Углерод, бор, алюминий, кремний, германий вызывают снижение растворимости водорода, а кобальт, медь, никель и молибден практически на нее не влияют. Аналогично воздействуют указанные элементы на растворимость азота в железе.

Магний увеличивает растворимость водорода в алюминии, а кремний уменьшает ее. Растворимость водорода в сплавах системы $Al-Si$ достигает минимума в эвтектической области.

Кислород является химически активным газом, поэтому он не подчиняется закону Сиверта. Предполагают, что он существует в расплаве в виде иона O^{2-} . Кислород образует с железом, никелем или медью ионно-гетерополярную связь. При достижении предела насыщения раствора устанавливаются насыщенные связи между кислородом и металлами и образуются химические соединения типа FeO , NiO и Cu_2O .

Зависимость растворимости кислорода от температуры выражается уравнениями:

- для железа

$$\lg[\%O] = -\frac{6254}{T} + 2,701;$$

- для никеля

$$\lg[\%O] = -\frac{7750}{T} + 4,057;$$

- для меди

$$\lg[\%O] = -\frac{4820}{T} + 3,03.$$

Поскольку кислород может вступать в химические взаимодействия с компонентами сплава, то они оказывают существенное влияние на его растворимость. В алюминиевых и магниевых сплавах кислород не растворяется, так как образует прочные тугоплавкие оксиды Al_2O_3 и MgO .

Газы, растворяясь в металле, диссоциируют на атомы. Сказанное относится и к растворению сложных газов. В частности, растворимость SO_2 изменяется пропорционально $P_{\text{SO}_2}^{1/3}$, что соответствует разложению молекулы на 3 атома – S и 2O.



Рассмотрим кинетические особенности взаимодействия газов с металлами.

Поглощение и выделение газа – сложный процесс, состоящий из нескольких последовательно протекающих стадий:

- подвод молекул газа в газовой фазе к поверхности раздела расплав–газ;
- перенос путем молекулярной диффузии молекул через пограничный газовый слой;
- адсорбция молекул газа на поверхности расплава;
- химическая реакция диссоциации молекул газа $\text{G}_2 \rightleftharpoons 2\text{G}_{\text{адс}}$;
- растворение атомов газа в поверхностных слоях металла;
- диффузионный перенос атомов через пограничный слой в металле;
- перенос растворенных атомов или ионов газа в жидком металле

конвективным путем от поверхности металл–газ в объем расплава.

При выделении газа эти стадии идут в обратном направлении.

Скорость процесса определяется лимитирующей стадией, т.е. стадией, скорость протекания которой наименьшая. Можно считать, что внешняя диффузия в объеме газа или металла совершается с большей скоростью и соответствующие стадии не являются лимитирующими. К числу лимитирующих стадий при взаимодействии с водородом можно отнести адсорбционную или диффузионную стадию. При взаимодействии с азотом усиливается роль адсорбционной стадии. Взаимодействие кислорода с железом характеризуется тем, что первая стадия поглощения кислорода связана с формированием на поверхности расплава оксидного слоя. На второй стадии происходит рост оксидного слоя и растворение кислорода в металле. Скорость второй стадии значительно ниже, чем первой.

При низких температурах и высоких давлениях кислорода скорость взаимодействия не зависит от парциального давления кислорода, и лимитирующим звеном является превращение хемадсорбированного кислорода в оксид.

При высоких температурах и низких давлениях кислорода лимитирующим звеном является адсорбция кислорода на поверхности оксида. Скорость окисления при этом пропорциональна $\sqrt{P_{O_2}}$.

Экспериментально установлено, что при высоких содержаниях кислорода в газовой фазе скорость его поступления в расплав лимитируется реакцией $O_{2(газ)} \rightleftharpoons [O]_{окисл}$ на поверхности оксида и доставкой кислорода через пограничный слой.

По зависимости кинетики окисления металлов от времени их можно разделить на две группы:

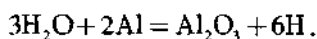
1. Металлы, подчиняющиеся зависимости $m_{O_2} = ct$. На них не образуется плотная оксидная пленка. К ним относятся Fe, Cu, Mg.

2. Металлы, на которых образуется плотная оксидная пленка и для которых характерна зависимость $m_{O_2} = k\sqrt{t}$. Растворимость кислорода в них очень мала. К таким металлам относится алюминий. Пленка Al_2O_3 способна адсорбировать водяные пары, которые разрыхляют ее структуру, что способствует проникновению в расплав как кислорода, так и водорода.

В заключение рассмотрим вопрос об основных источниках напыления металлов и сплавов газами.

Кроме печной атмосферы, газы могут поступать в расплав из шихтовых материалов, флюсов, шлакообразующих материалов и различных присадок, а также из футеровки печи.

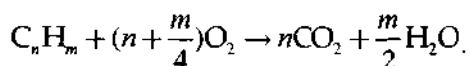
Основным источником водорода является водяной пар. Он восстанавливается металлом с образованием оксида и водорода. Применительно к алюминию эта реакция имеет вид



Эта реакция значительно сдвинута вправо. Поэтому незначительная концентрация паров воды в атмосфере может привести к существенному наводороживанию расплава.

Появление газовой пористости в отливках могут вызвать SO_2 и CO , которые образуются в результате химического взаимодействия растущих газов с составляющими сплава и формы.

При плавке в пламенных печах особое значение имеет влага, образующаяся при окислении углеводородов топлива:



Глава 2. ВЫДЕЛЕНИЕ ГАЗОВ ПРИ ОХЛАЖДЕНИИ И ЗАТВЕРДЕВАНИИ СПЛАВА. МЕХАНИЗМ ФОРМИРОВАНИЯ ЭНДОГЕННЫХ РАКОВИН И ПОРИСТОСТИ В ОТЛИВКАХ

В процессе охлаждения сплава в форме растворимости газов, в первую очередь водорода, уменьшается, что создает термодинамические предпосылки для выделения газов в виде самостоятельной фазы. Этому препятствуют кинетические условия, связанные с зарождением газового пузырька и процессами диффузии газа из расплава в пузырек. Для зарождения и роста пузырька необходимо, чтобы давление газа в пузырьке P_2 удовлетворяло условию

$$P_2 \geq P_{\text{вн}} + \rho gH + \frac{2\sigma}{r},$$

где $P_{\text{вн}}$ – внешнее давление;

H – высота столба расплава над уровнем зарождения пузырька;

ρ – плотность жидкого сплава;

σ – поверхностное натяжение сплава;

r – радиус пузырька.

Очевидно, что в чистом, гомогенном расплаве зарождение пузырька невозможно, так как для этого требуются бесконечно большие давления. В реальных сплавах зарождение пузырьков облегчается, так как имеется большое количество мелких твердых включений, готовая поверхность которых резко снижает капиллярное давление.

При падении растворимости газа в расплаве, имеющем скачкообразный характер в процессе его затвердевания, концентрация газа в жидком, незатвердевшем сплаве повышается, что обуславливает потенциальное

увеличение давления в соответствии с формулой $P_{\text{H}_2} = \left(\frac{[H]_{\text{ж}}}{K_{\text{H}_2}} \right)^2$. Возрас-

тание давления обуславливает появление газовых пузырьков при некоторой доле затвердевшего металла.

Выполним следующий приближенный анализ. Пусть первые пузырьки газа появились при некоторой доле твердой фазы $m/100$, где m – масса затвердевшего металла в граммах при исходной массе жидкого сплава 100 г.

С некоторым приближением можно написать уравнение

$$\frac{K_{\text{Hте}} \sqrt{P_{\text{вн}}} \cdot m}{100} + \frac{K_{\text{Hжс}} \sqrt{P_{\text{вн}}} (100 - m)}{100} = C_{\text{жс.нач}},$$

где $C_{\text{жс.нач}}$ — начальная концентрация водорода в расплаве.

Разрешив это уравнение относительно $m/100$, найдем выражение для оценки доли закристаллизовавшегося металла $N=m/100$ к моменту выделения первого пузырька.

$$N = \frac{K_{\text{Hжс}}}{K_{\text{Hжс}} - K_{\text{Hте}}} \left(1 - \frac{C_{\text{жс.нач}}}{K_{\text{Hжс}} \sqrt{P_{\text{в}}}} \right).$$

Из этого выражения видно, что с уменьшением величины $\frac{K_{\text{Hжс}}}{K_{\text{Hжс}} - K_{\text{Hте}}}$ доля твердой фазы уменьшается, т.е. газовые пузырьки начинают выделяться с самого начала затвердевания. С увеличением этой величины выделение пузырьков развивается позднее. Поэтому данное отношение играет роль показателя склонности сплавов к образованию газовой пористости. Чем меньше это отношение, тем сплав более склонен к образованию пористости.

В табл. 6.2 приведены значения $\frac{K_{\text{Hжс}}}{K_{\text{Hжс}} - K_{\text{Hте}}}$ для некоторых металлов. Несмотря на то что растворимость водорода в магнии наибольшая, он менее склонен к образованию газовых пор. Прогнозы, полученные на основании сопоставления значений указанного показателя, полностью соответствуют производственным данным.

Как видно из полученного выше выражения, величина N увеличивается с уменьшением начальной концентрации водорода $C_{\text{жс.нач}}$ и повышением внешнего давления. Поэтому для борьбы с газовой пористостью целесообразно снижать $C_{\text{жс.нач}}$, т.е. подвергать сплав рафинированию и увеличивать внешнее давление на расплав. Эти мероприятия успешно реализуются при автоклавном литье и при литье с противодавлением, когда отливка формируется под всесторонним газовым давлением (от 0,3 до 2,5 МПа).

В работе [19] предложена несколько иная характеристика склонности сплавов к образованию газовой пористости.

$$g = \frac{S_{\text{жс}} - S_{\text{те}}}{S_{\text{те}}},$$

где $S_{ж}$ – исходное содержание газа в жидком сплаве;

$S_{тв}$ – содержание газа в твердом сплаве.

Величина $S_{ж}$ определяется технологией плавки и рафинирования сплава, а $S_{тв}$ – растворимостью газа в твердом металле и условиями затвердевания. Сплавы в большей степени предрасположены к образованию с водородом пересыщенных твердых растворов, т.е. величина $S_{тв}$ может значительно превышать величину растворимости. На величину $S_{тв}$ оказывает большое влияние скорость затвердевания сплава при кристаллизации. С увеличением скорости затвердевания водород не успевает выделиться из затвердевшего сплава с образованием пересыщенного по водороду твердого раствора. Например, в условиях литья алюминиевых сплавов в песчаные и металлические формы величина $S_{тв}$ составляет от 0,1 до 0,15 см³ на 100 г сплава, что в 3–4 раза превышает равновесную растворимость, равную 0,038 см³ на 100 г сплава.

Безопасное с точки зрения образования газовой пористости максимально допустимое содержание водорода составляет [19]:

- для алюминиевых сплавов – 0,12–0,15 см³ на 100 г сплава;
- для медных сплавов – 2,5 см³;
- для железоуглеродистых сплавов – 15 см³;
- для магниевых сплавов – 19 см³.

По данным М.Б. Альтмана при содержании в алюминиевом сплаве 0,3–0,4 см³ водорода на 100 г сплава газовая пористость может достигать 1,0–1,5% [19].

Как показано в разд. 4, при фильтрационном питании давление в жидком сплаве вдоль фильтрационного канала уменьшается, что облегчает зарождение и рост газового пузырька. Образование пузырька приводит к разрыву сплошности фильтрационного потока и обуславливает появление усадочной поры. Поэтому можно говорить не о чисто усадочной или газовой пористости, а о газоусадочной пористости.

Как показывают опытные данные, давление в газовом пузырьке может быть существенным. Поэтому в некоторых условиях пузырьки образуются и в твердом металле. Известно, что при содержании 0,001 % водорода при температуре ниже 400 °С в твердой стали образуются пузырьки при давлении, большем 400 МПа, что приводит к образованию трещин (флокенов). При охлаждении недостаточно раскисленной меди выделяющийся из раствора оксид вступает в реакцию с водородом с образованием пузырьков водяного пара: $\text{Cu}_2\text{O} + \text{H}_2 = \text{Cu} + \text{H}_2\text{O}$. Это приводит к появлению трещин, т.е. к возникновению дефекта, называемого водородной хрупкостью меди.

В зависимости от условий кристаллизации указанные дефекты могут иметь вид не только мелких пор, но и более или менее крупных газовых раковин, распределенных относительно равномерно по объему отливки.

Они могут возникать за счет не только растворенных в металле газов, но и газов, выделяющихся в расплаве при его охлаждении вследствие химических реакций. Например, закись железа, растворенная в жидкой стали, выделяется при кристаллизации и взаимодействует с углеродом с образованием CO: $\text{FeO} + \text{C} = \text{Fe} + \text{CO}$. Вследствие этой реакции в некоторых отливках наблюдается ситовидная пористость, представляющая собой сотообразные пустоты, расположенные обычно вблизи поверхности отливки.

Аналогично закиси железа с углеродом реагируют и оксиды некоторых других металлов. Поверхностные газовые раковины иногда образуются при литье бронзовых втулок в кокиль, когда при недостаточном раскислении сплава происходит восстановление оксида меди углеродом, входящим в состав кокильного покрытия: $\text{CuO} + \text{C} = \text{Cu} + \text{CO}$. Эта реакция интенсивно протекает в наиболее горячих местах отливки. Пример этих дефектов приведен на рис. 6.1.

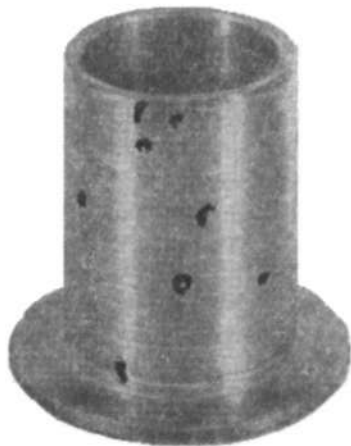


Рис. 6.1. Газовые раковины при литье бронзовых отливок в кокиль с углеродистым покрытием

При литье стали в сырые песчаные формы расплав на поверхности формы взаимодействует с водой по реакции $\text{Fe} + \text{H}_2\text{O} = \text{FeO} + \text{H}_2$. Водород диффундирует в расплав, концентрация его в стали повышается. При взаимодействии с FeO, содержащейся в стали, образуются водяные пары, которые вызывают образование подкорковых иглообразных газовых раковин (рис. 6.2).

В результате выделения водорода из стали могут образовываться мелкие гвоздеобразные раковины (рис. 6.3)

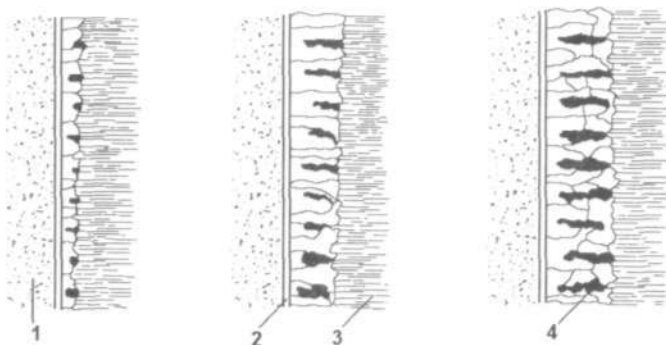


Рис. 6.2. Схема образования поверхностных газовых раковин:
1 – смесь; 2 – оксидный слой; 3 – жидкая сталь; 4 – иглообразные пустоты

Указанные газовые дефекты, обусловленные газами, растворенными или выделяющимися в металле, называются *эндогенными*.

Экзогенные газовые дефекты возникают при проникновении в жидкий сплав газов извне, или при заливке формы, или из самой литейной формы. Они рассматриваются в курсе «Технология литейного производства».

Методы предотвращения появления эндогенных газовых дефектов сводятся к следующему:

- совершенствование технологии плавки;
- рафинирование сплавов;
- оптимизация теплового режима затвердевания отливок;
- применение всестороннего повышенного газового давления при затвердевании отливок.



Рис. 6.3. Газовые раковины, образованные в результате выделения водорода из стали

Для производства отливок ответственного назначения из алюминиевых сплавов А.А. Бочваром и А.Г. Спасским предложен метод, при котором затвердевание отливок проводится в автоклаве в условиях всестороннего повышенного газового давления. При этом тормозится выделение водорода из затвердевшего сплава, затрудняется зарождение и рост газовых пузырей, улучшаются условия фильтрационного питания отливки.

Глава 3. ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРЕДОТВРАЩЕНИЯ ОБРАЗОВАНИЯ ГАЗОВЫХ ДЕФЕКТОВ В ОТЛИВКАХ

Важнейшим путем предотвращения образования в отливках газовых дефектов является рафинирование сплава. *Под рафинированием понимают процессы снижения содержания в расплаве газов и удаления неметаллических включений.*

Различают адсорбционные и неадсорбционные методы рафинирования сплавов. В первую группу входят методы, действие которых основано на адсорбционных процессах. Неадсорбционные методы основаны на нарушении равновесия системы металл – газ – твердые неметаллические включения в объеме расплава.

3.1. Адсорбционные методы рафинирования

К этим методам относят рафинирование продувкой инертными и химически активными газами, обработкой расплава солями, флюсами, шлаками, а также фильтрацией через активные фильтры.

3.1.1. Рафинирование продувкой газами

Рафинирование стали и других сплавов осуществляют продувкой инертными газами (аргоном, гелием, для ряда сплавов – азотом). Наиболее широко для этой цели используют газообразный аргон при давлении 0,2–0,5 МПа. Удельный расход аргона составляет от 0,04 до 0,2 м³/т при продолжительности продувки 5–15 мин.

Дегазирующее действие пузырька аргона основано на том, что парциальное давление других газов в нем равно нулю. Поэтому растворенные в металле газы диффундируют в пузырек, там молизируются и вместе с пузырьком аргона выносятся в атмосферу.

Полнота удаления газов зависит от времени всплывания пузырей, их размера и т.п. Теоретически дегазация металла продувкой инертными газами основана на допущении, что за время всплывания пузыря парциальные давления в нем водорода, азота и СО (в сталях) достигают состояния равновесия по закону Сиверса:

$$P_{H_2} = \frac{[H]^2}{K_H^2}; P_{N_2} = \frac{[N]^2}{K_N^2}; P_{CO} = K_C \cdot [C] \cdot [O].$$

Необходимое количество газа можно оценить по формуле

$$V_n = \frac{224}{M_C} K^2 P \left(\frac{1}{[C]_e} - \frac{1}{[C]_{e0}} \right),$$

где M_C – молярная масса удаляемого газа;

K – константа равновесия реакции растворения газа при данной температуре;

P – давление газа над расплавом, Па;

$[C]_{e0}$ и $[C]_e$ – начальное и конечное содержание удаляемого газа, %.

Так как состояние равновесия в пузырях при продувке не достигается, фактический расход газа превышает рассчитанный по формуле. Лимитирующим звеном процесса является скорость массопереноса газа в объеме металла. При подъеме пузырей за счет флотации происходит удаление из расплава неметаллических включений.

Степень дегазации расплавов при продувке инертными газами, как правило, невелика. Более эффективна продувка активными газами. Применительно к алюминиевым сплавам осуществляют продувку хлором. Сущность действия хлора состоит в образовании хлористого алюминия $AlCl_3$ и хлористого водорода HCl . Хлористый алюминий кипит при температуре 180 °С. Пузырьки $AlCl_3$ всплывают в расплаве. При этом на них адсорбируются пузырьки водорода. Так как хлор токсичен, на практике широко применяют хлористые соли: $ZnCl_2$, $MnCl_2$ и гексахлорэтан C_2Cl_6 . По реакции $Al + 3MeCl = AlCl_3 \uparrow + 3Me$ образуется хлористый алюминий. Обработка алюминиевых сплавов хлором или хлористыми солями обеспечивает эффективное рафинирование сплавов.

3.1.2. Рафинирование флюсами

При плавке цветных сплавов широко применяют рафинирование флюсами. Действие флюсов основано на флотировании неметаллических включений. Рассмотрим включение Al_2O_3 в алюминиевом расплаве в контакте с каплей флюса (рис. 6.4).

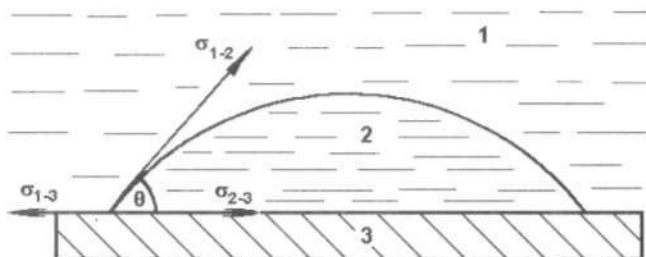


Рис. 6.4. Схема к пояснению механизма рафинирования флюсами:
1 – расплав; 2 – флюс; 3 – включение Al_2O_3

Для того чтобы флюс смачивал включение, межфазные натяжения должны удовлетворять условию

$$\sigma_{1-3} > \sigma_{1-2} \cdot \cos \theta + \sigma_{2-3} \text{ или } \sigma_{1-3} > \sigma_{1-2} + \sigma_{2-3}.$$

В данном случае флюс растекается по поверхности включения и охватывает его.

Флюсы для алюминиевых сплавов подбираются так, чтобы их плотность была меньше плотности сплавов. При этом капли флюса вместе с включениями всплывают вверх.

При плавке магниевых сплавов плотность флюса больше плотности сплава. Поэтому флюсовая фаза с включениями опускается на дно.

В состав флюсов для алюминиевых сплавов входят фтористые и хлористые соли натрия и калия.

3.1.3. Рафинирование синтетическими шлаками

Для рафинирования стали, в том числе и для десульфурации, применяют ее обработку известково-глиноземистыми шлаками (53–55 % CaO , менее 43–45 % Al_2O_3 , менее 3 % SiO_2 и менее 1 % FeO). Шлак расплавляют

в электродуговой печи с угольной футеровкой. Шлак в количестве 3–6 % от массы стали заливают в ковш, а затем в этот же ковш выпускается из печи сталь. Шлак эмульгируется, и поверхность его контакта со сталью резко увеличивается. Десульфурация происходит очень эффективно. Коэффициент распределения серы достигает 27–77. При этом всплывающие капельки флюса эффективно выносят неметаллические включения и снижают содержание газов в стали.

Для всех адсорбционных методов характерен общий недостаток – невозможность охватить весь объем расплава, так как очищаются только те участки, через которые проходит адсорбент.

3.2. Неадсорбционные методы рафинирования

К этой группе методов можно отнести рафинирование **вакуумированием** и ультразвуком.

3.2.1. Рафинирование вакуумированием

Метод рафинирования в вакууме основан на том, что при понижении давления газа над расплавом растворимость газов в расплаве в соответствии с законом Сиверта уменьшается. Газы начинают интенсивно выделяться из расплава. При этом происходит падение концентрации газов во всем объеме расплава. Так как водород адсорбирован на неметаллических включениях, то они поднимаются на поверхность расплава или оседают на дно тигля.

Возможны два механизма удаления газов: диффузионный и пузырьковый. В начальные моменты давление газа $P_g \gg P_{\text{вк}} = P_{\text{ат}} + \rho g H$, где $P_{\text{ат}}$ – внешнее давление, и имеет место пузырьковый перенос газа. По мере рафинирования концентрация газа снижается и P_g уменьшается. При этом скорость десорбции газа из расплава будет зависеть от скорости диффузии газа в металле.

Обычно вакуумирование проводится при давлении над расплавом $1\text{--}10^3$ мм рт. ст.

При дегазации стали вакуумированием ее эффективность определяется массопереносом газа в объеме металла. Поэтому очень большое значение имеет перемешивание стали, особенно при ее кипении по реакции $[C] + [O] \rightleftharpoons CO$, которая при вакуумировании протекает быстрее.

В процессе вакуумирования происходит одновременное удаление нескольких газов (водорода, азота и кислорода). При этом всплывание пузырей CO усиливает эффективность удаления из расплава водорода, азота и кислорода.

На практике применяются разные схемы вакуумирования сплавов, и эффективность рафинирования зависит от используемой технологии. При вакуумировании алюминиевых сплавов остаточное содержание водорода можно снизить до $0,08\text{--}0,11\text{ см}^3$ на 100 г сплава.

На рис. 6.5 приведены промышленные установки для вакуумирования сплавов.

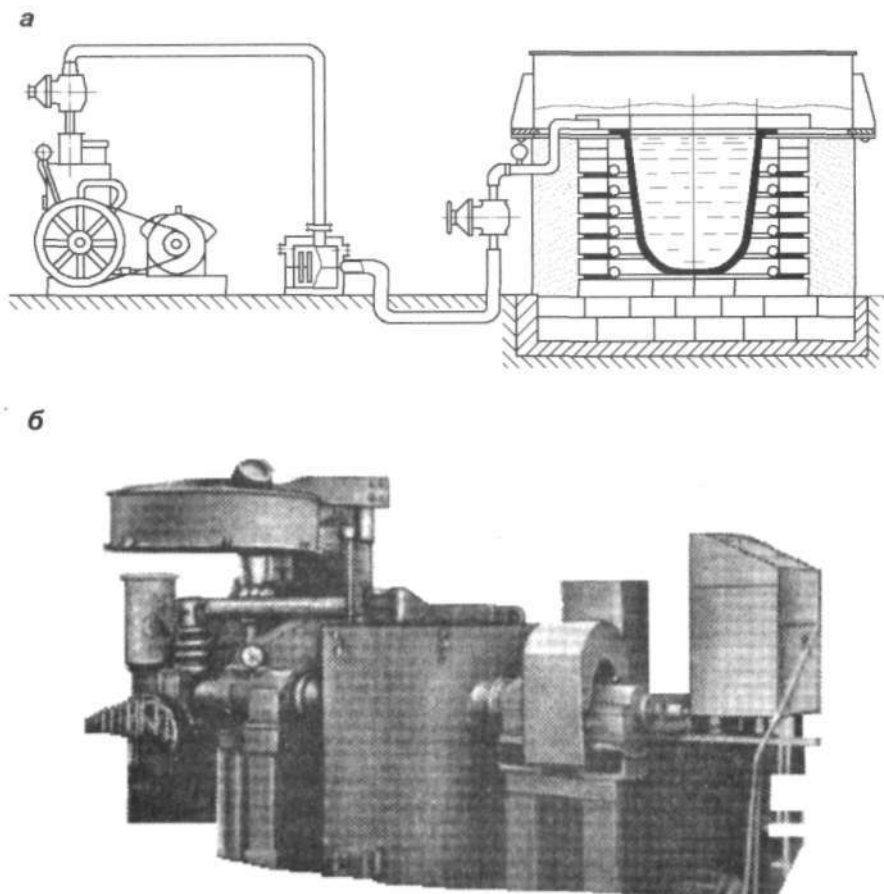


Рис. 6.5. Установки для вакуумирования сплавов:
а – вакуумная раздаточная печь;
б – вакуумная индукционная установка

3.2.2. Рафинирование ультразвуком

При обработке расплавов ультразвуком можно выделить два явления, которые происходят при введении упругих колебаний ультразвуковой частоты.

Во-первых, развиваются кавитационные процессы. В период распространения звуковой волны в кавитационной полости резко снижается давление, что вследствие снижения растворимости газа приводит к выделению его пузырьков.

Во-вторых, диффузионные процессы протекают под действием колебаний более интенсивно, что способствует росту пузырьков до размеров, обеспечивающих их быстрое всплывание.

Упругие колебания от ультразвукового агрегата с помощью волновода (для алюминиевых сплавов из титана или ниобия) передаются в расплав. Применяемая частота колебаний – 16–21 кГц.

Данный метод дает хорошие результаты при рафинировании, хотя отличается сложностью технологии и оборудования. На рис. 6.6 приведена схема ультразвуковой установки для введения упругих колебаний в расплав.

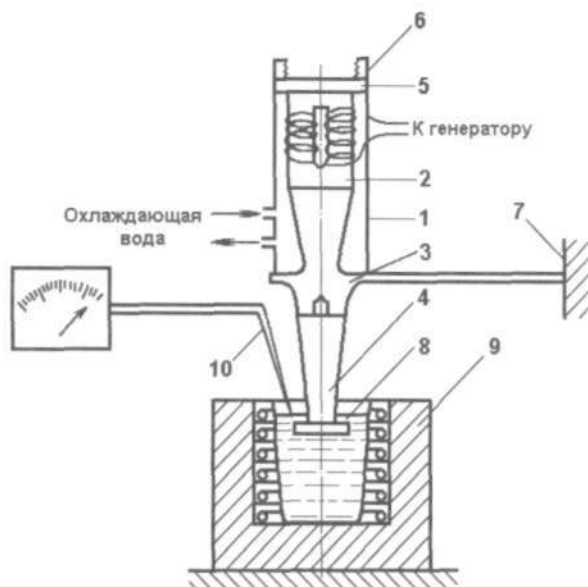


Рис. 6.6. Схема ультразвуковой установки:

1 – кожух; 2 – магнитный преобразователь с обмоткой; 3 – концентратор; 4 – вибратор с резьбовым креплением; 5 – резиновый амортизатор; 6 – сильфон; 7 – крепление узла; 8 – тигель с расплавом; 9 – печь электросопротивления; 10 – термопара

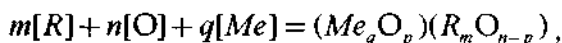
Как показала экспериментальная сравнительная оценка разных методов рафинирования алюминиевых сплавов, неадсорбционные методы по эффективности значительно превосходят адсорбционные и позволяют получать отливки с более низким содержанием неметаллических включений и уровнем пористости.

3.3. Раскисление сплавов

При окислительной плавке стали, медных, никелевых и ряда других сплавов образуются растворенные в сплаве оксиды железа, меди, никеля и др. При кристаллизации сплава происходит выделение оксидной фазы по границам зерен, которая уменьшает сплошность металла и сцепление зерен. Так как температура плавления оксидных эвтектик ниже температуры плавления сплава, то при нагреве сплава проявляется свойство, называемое *красноломкостью*. Кроме того, происходит снижение пластических свойств сплава, особенно ударной вязкости.

Поэтому важнейшей операцией является *раскисление*, т.е. удаление из сплава растворенного кислорода или связывание его в прочные соединения.

Раскисление проводится с помощью элементов-раскислителей. Схематично процесс раскисления отражает уравнение



где *Me* – раскисляемый металл;

R – элемент-раскислитель;

$(Me_q O_p)(R_m O_{n-p})$ – продукт раскисления.

Состав продукта раскисления определяется раскислительной способностью раскислителя и его концентрацией в металле.

Раскислительная способность отдельных элементов обуславливается тем, какая концентрация кислорода может остаться в металле в равновесии с определенной концентрацией данного элемента при данной температуре. Чем ниже остаточная концентрация кислорода, тем сильнее раскислительная способность элемента. Раскислители должны обладать большим сродством к кислороду, чем металл (а в сталях также большим, чем углерод).

Для раскисления стали применяют Si, Mn, Al, а в специальных сталях – Ti, Mg, Ca, B, Zr и PЗМ. По увеличению раскислительной способности в сталях элементы можно расположить в ряд: Mn, Si, Al, Ni, Mg, Ca, PЗМ.

Наиболее широко применяемыми раскислителями при плавке медных сплавов являются фосфор, цинк, алюминий, магний, барий, бор.

Помимо соответствия требованиям, предъявляемым к раскислительной способности и сродству к кислороду, раскислители (и технология рас-

кисления) должны обеспечивать выделение благоприятных по форме (глобулярность) и легко удаляемых в шлак продуктов раскисления.

Технология раскисления сплавов и конкретные составы раскислителей рассматриваются в курсах стального и цветного литья.

Глава 4. ЭКЗОГЕННЫЕ И ЭНДОГЕННЫЕ НЕМЕТАЛЛИЧЕСКИЕ ВКЛЮЧЕНИЯ

Механические свойства сплавов в отливках в значительной мере определяются содержащимися в них неметаллическими включениями.

Неметаллические включения, образующиеся в результате протекания реакций в жидком и затвердевающем металле, называются эндогенными.

Внесенные со стороны включения (из формы, шихтовых материалов, футеровки печи) называются экзогенными.

После кристаллизации расплава избыточный кислород (сверх равновесного в α -Fe) переходит в оксидные неметаллические включения (MnO , SiO_2 , Al_2O_3 и др.), образующиеся после введения раскислителей. Наряду с оксидными включениями в сталях присутствуют сульфиды (FeS , MnS и др.), карбиды (Fe_3C , Mn_3C , Cr_3C_2 и др.), нитриды (ZrN_2 , VN , NiN и др.), фосфиды (Fe_3P , Fe_2P_4 и др), а также комплексные включения типа окси-сульфидов, карбонитридов, силикатов и др.

С точки зрения эксплуатационных свойств сплава имеет значение не только общее количество неметаллических включений и их размеры, но и форма включений. Наилучшие свойства достигаются при округлой глобулярной форме включений.

Большинство неметаллических включений имеют меньшую плотность, чем жидкий металл. Вследствие разности плотностей включения при отстаивании сплава должны всплыть на его поверхность. Скорость всплывания включений зависит от их размеров, а также от межфазных натяжений на границе с расплавом, друг с другом и другими включениями.

Размер включений колеблется в пределах от 10^{-5} до 10^{-1} мм. Рост включений может происходить путем осаждения на образовавшихся частицах выделившихся из стали продуктов раскисления или их коагуляции при взаимном столкновении. Первый путь роста характеризуется невысокой скоростью. При столкновении частиц необходимо учитывать два фактора: возможность столкновения и степень взаимодействия при столкновении. Частота столкновений зависит от гидродинамики жидкой ванны и увеличивается при вызванном разными причинами перемешивании расплава. Эффективность коагуляции зависит от физического состояния частиц. Процесс коагуляции облегчается, если одна или обе частицы жидкие.

Две твердые частицы могут соединиться посредством либо химического взаимодействия, либо спекания.

Наиболее благоприятные условия для укрупнения включений имеют оксиды из элементов сильных раскислителей. Температура плавления таких оксидов высокая: у Al_2O_3 – 2080 °С; у Ti_2O_5 – 2125 °С. Поэтому необходимо предварительно раскислять сталь более слабыми раскислителями (Mn, Si). При этом образуются легкоплавкие продукты, которые при введении более сильных раскислителей успешно соединяются с твердыми оксидами алюминия, титана и т.п.

Морфология неметаллических включений зависит от режима раскисления и используемых методов модифицирования стали. Наиболее сильным раскислителем, применяемым при плавке стали, является алюминий. При раскислении стали в зависимости от химического состава могут образовываться сульфиды трех типов.

При малом содержании остаточного алюминия образуются глобулярные, неравномерно распределенные по объему стали сульфиды. Они оказывают незначительное влияние на свойства стали. Однако при малом количестве алюминия сталь не полностью раскислена. С увеличением содержания алюминия сульфиды располагаются в виде пленок и цепочек по границам зерен. Этот второй тип включений оказывает резко отрицательное влияние на механические свойства стали, особенно на ее пластичность и ударную вязкость. При дальнейшем увеличении содержания остаточного алюминия формируется третий тип включений, представляющих собой крупные, компактные сульфиды. Они в меньшей степени снижают качество стали.

При раскислении вводят сверхкритическое содержание алюминия, при котором обеспечивается полное раскисление стали и формируются сульфиды третьего типа. Величина остаточной концентрации алюминия зависит от химического состава стали и должна для низкоуглеродистой стали превышать 0,1%, для среднеуглеродистой стали – 0,05–0,015%.

Для глобулизации неметаллических включений раскисление оптимальным количеством алюминия комбинируют с обработкой расплава модификаторами – лигатурами щелочноземельных и редкоземельных металлов.

Очищение металла от неметаллических включений происходит путем их свободного всплывания. Обычно выдержка металла в ковше составляет 5–10 мин, что достаточно для удаления крупных включений. Состав шлака должен быть подобран таким образом, чтобы он хорошо ассимилировал всплывшие включения, иначе потоки металла будут вновь уносить их вглубь.

Большую долю составляют включения, образующиеся при кристаллизации или в твердом металле. В первом случае удаление их затруднено, а из твердого металла включения выделиться не могут.

Для рафинирования расплавов от неметаллических включений применяются рассмотренные выше методы.

Контрольные вопросы и задания

1. В чем состоит закон Сивертса для растворимости газов в металлах? Для каких газов он несправедлив?
2. Каковы особенности растворения кислорода в металлах?
3. Определите растворимость водорода в алюминии и магнии при атмосферном давлении и при температурах 500, 600, 700 и 800 °С.
4. Определите растворимость водорода в меди при температурах 900, 1000 и 1250 °С.
5. В чем главная причина образования газовой пористости в отливках?
6. Почему, несмотря на то что растворимость водорода в магнии значительно выше, чем в алюминии, магниевые сплавы в отличие от алюминиевых не склонны к образованию газовой пористости?
7. Перечислите основные кинетические этапы взаимодействия газов с металлами. Какие этапы являются лимитирующими процесс?
8. Каковы основные источники насыщения расплавов газами?
9. Опишите механизм образования газовых пор в отливках.
10. Будет ли образовываться пузырек водорода в алюминиевых сплавах при следующих условиях: радиус пузырька $r=0,1$ мм; поверхностное натяжение $\sigma=600$ эрг/см²; внешнее давление $P_{\text{вн}}=980 \cdot 10^3$ дн/см²; плотность сплава $\rho=2,5$ г/см³; расстояние от зарождающегося пузырька до поверхности сплава $h=20$ см; начальное давление газа в пузырьке $P_g=200 \cdot 10^3$ дн/см²? До какого значения следует снизить атмосферное давление, чтобы пузырек газа возник?
11. Что такое флокены в стали? Каков механизм их образования?
12. Перечислите адсорбционные и неадсорбционные методы рафинирования стали.
13. Каков механизм рафинирования сплавов продувкой газами?
14. В чем сущность рафинирования сплавов вакуумированием?
15. Благодаря каким явлениям происходит рафинирование сплавов ультразвуком?
16. Перечислите основные требования к рафинировочным флюсам.
17. Какие требования предъявляются к раскислителям? Чем определяется раскислительная способность элементов?
18. Перечислите основные виды неметаллических включений. Назовите методы управления количеством и формой неметаллических включений.

Заключение

В учебнике рассмотрен комплекс разделов теории литейных процессов, которые традиционно включаются в программы соответствующих дисциплин в учебных планах по подготовке инженеров-литейщиков разных направлений.

При изложении материала основное внимание уделено освещению научных основ процессов, происходящих при формировании отливок, а также современным методам их количественного описания.

Теория литейных процессов – непрерывно развивающаяся отрасль прикладной науки. Перспективы ее развития связаны с широким внедрением методов прикладной математики и вычислительной техники. Уже на современном этапе идет интенсивная разработка систем автоматизированного проектирования технологий, основанных на математическом моделировании рассмотренных в данном учебнике процессов. Поэтому теоретические положения при изучении теории литейных процессов должны в ходе учебного процесса закрепляться и конкретизироваться на практических занятиях с использованием прикладных программ. Это относится к расчету и анализу кинетики затвердевания отливок, процессов питания, формирования деформаций и напряжений. Основные подходы к решению подобных задач описаны в данном учебнике.

Перспективные направления развития теории литейных процессов связаны с дальнейшим развитием методов математического моделирования и накоплением системных данных о свойствах сплавов в широком интервале температур.

Библиографический список

1. *Баландин Г.Ф.* Основы теории формирования отливок: В 2 ч. Ч.1. – М.: Машиностроение, 1976. – 328 с.
2. *Баландин Г.Ф.* Основы теории формирования отливок: В 2 ч. Ч.2. – М.: Машиностроение, 1979. – 336 с.
3. *Баландин Г.Ф.* Теория формирования отливки. – М.: Изд-во Моск. гос. техн. ун-та, 1998. – 359 с.
4. *Брандт Н.Б., Чудинов С.М.* Электронная структура металлов. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1973. – 332 с.
5. *Гольдштейн Я.Е., Мизин В.Г.* Инокулирование железоуглеродистых сплавов. – М.: Metallurgia, 1993. – 416 с.
6. *Гуляев Б.Б.* Теория литейных процессов. – Л.: Машиностроение, 1976. – 215 с.
7. *Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С.* Теплопередача. – М.: Энергия, 1975. – 489 с.
8. *Канн Р.У., Хаазен П.* Физическое металловедение: В 2 т. Т.2. – М.: Metallurgia, 1987. – 622 с.
9. *Книпп Э.* Пороки отливок. Причины образования пороков и меры их устранения. – М.: Машгиз, 1958. – 276 с.
10. *Куманин И.Б.* Вопросы теории литейных процессов. – М.: Машиностроение, 1976. – 216 с.
11. *Кутателадзе С.С.* Теплопередача и гидродинамические сопротивления: Справ. пособие. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 366 с.
12. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. – М.: Высш. шк., 1967. – 478 с.
13. *Лыков А.В.* Тепломассообмен: Справ. – М.: Энергия, 1972. – 560 с.
14. *Медведев Я.И.* Газы в литейной форме. – М.: Машиностроение, 1965. – 240 с.
15. *Никитин В.И.* Наследственность в литых сплавах. – Самара, 1995. – 246 с.
16. *Пельх С.Г., Семесенко М.П.* Оптимизация литейных процессов. – Киев: Выща шк., 1977. – 192 с.
17. *Попель С.И.* Поверхностные явления в расплавах. – М.: Metallurgia, 1994. – 432 с.
18. *Рабинович Б.В.* Введение в литейную гидравлику. – М.: Машиностроение, 1967. – 272 с.
19. *Рафинирование алюминиевых сплавов в вакууме /М.Б. Альтман, Е.Б. Глотов, Р.М. Рябина, Т.И. Смирнова.* – М.: Metallurgia, 1970. – 160 с.
20. *Флемингс М.* Процессы затвердевания. – М.: Мир, 1977. – 424 с.
21. *Чуркин Б.С.* Основы теплофизики литейных процессов: Учеб. пособие/Свердл. инж.-пед.ин-т. – Екатеринбург, 1992. – 183 с.
22. *Чуркин Б.С., Гофман Э.Б.* Основы литейной гидравлики: Учеб. пособие/Свердл. инж.-пед.ин-т. – Екатеринбург, 1992. – 236 с.
23. *Эллиот Р.* Управление эвтектическим затвердеванием. – М.: Metallurgia, 1987. – 351 с.

Предметный указатель

- Адгезия 70
- Аморфные тела 14
- Вакансии 25, 26
- Вакансионно-кластерная теория
 плавления 26, 27
- Вибрация 281
- Время оседлой жизни атома 24
- Газовая пористость 433
- Газовые раковины
 - экзотермические 433, 437
 - эндотермические 433, 437
- Гистерезис свойств 39
- Горячеломкость сплавов 337, 338
- Градиент температуры 80, 81
- Граничные условия 96, 98, 100
- Двумерные зародыши 232
- Дендритная кристаллизация 254
- Дислокационный рост
 кристаллов 238
- Дислоцированные атомы 25, 26
- Жидкотекучесть 414
- Задача Стефана 146
- Закон
 - Дарси 312
 - «квадратного корня» 149
 - Сивертса 428
- Заполняемость форм 404, 414
- Затвердевание отливок
 - объемное 164
 - последовательное 164
- Зоны
 - действия прибылей 323
 - замороженных кристаллов 265
 - равноосных кристаллов 267
 - столбчатых кристаллов 267
- Кинетика кристаллизации 239
- Когезия 64, 71
- Конвекция 84, 85
- Концентрационное пере-
 охлаждение 250, 251
- Координационная сфера 16
- Координационное число 15
- Коробление отливок 369
- Корреляционная функция 31, 32
- Критерий
 - Био 125, 126, 128
 - Грасгофа 88
 - Нуссельта 87
 - Пекле 87
 - Прандтля 87
 - Рейнольдса 88
- Коэффициент
 - аккумуляции тепла 136
 - распределения 244
- Ликвация
 - внутрикристаллическая 246, 272
 - дендритная 245
 - зональная 269
- Литейная гидравлика 380
- Магнитное перемешивание 281
- Металлическая связь 19
- Метод вписанных окружностей 286
- Методы расчета кинетики
 затвердевания
 - Г.Ф. Баландина 183
 - А.И. Вейника 185
 - Ю.А. Нехендзи и
 Н.Г. Гиршовича 185
 - Н. И. Хворинова 177
 - С. Шварца 172
 - конечных разностей 194
 - конечных элементов 211
 - потоков 207
- Механизм остановки потока 389

- Микронеоднородность сплава 37
Модели жидкого состояния
– квазикристаллическая 28, 29
– псевдогазовая 28
Модифицирование 262
– первого рода 230, 276
– второго рода 276
– комплексное 276

Напряжения литейные 335, 365, 376
– термические 359, 367
– усадочные 358
– фазовые 356, 368
Наследственность 39
Неметаллические включения
– экзогенные 445, 446
– эндогенные 445, 446

Питание отливки
– суспензионное 317
– фильтрационное 310, 313, 316
Поверхностно-активные
и инактивные вещества 65, 66
Поверхностное натяжение 63, 64
Пористость усадочная 310
Прибыль 320
– боковая 324
– газового давления 332
– легкоудаляемая
– местная 321
– потайная 325
– прямого действия 320
– экзотермическая 330
Пригар 72, 73
Принцип направленного
Затвердевания 302

Раскисление сплава 444
Рафинирование 438
– адсорбционное 438
– неадсорбционное 441
– флюсами 440
Регулярный режим 133

Смачиваемость 66, 67
Сопротивление термическое 106
Сфера деформации 26

Температуропроводность 88
Тепловой поток 76
Теплопередача 76
Теплопроводность 80, 83
– нестационарная 117
– стационарная 101
Термический узел отливки 301
Трещины 335, 352

Уравнение
– Фурье 94
– Фурье–Кирхгофа 94
Ультразвуковая обработка 443
Усадка
– в жидком состоянии 289, 290, 294
– в твердом состоянии 288
– затрудненная 291
– линейная 287
– литейная 291
– объемная 256
– при затвердевании 294
– свободная 275
Усадочная раковина 292
Усадочные явления 285
Утяжины 307, 309

Холодильники
– внутренние 302, 303, 304
– наружные 302, 304

Список основных условных обозначений

$T_{кр}$	– температура кристаллизации
$T_{л}$	– температура ликвидуса
T_c	– температура солидуса
$T_{н.ж}$	– температура нулевой жидкотекучести
η	– динамический коэффициент вязкости
ν	– кинематический коэффициент вязкости
σ	– поверхностное натяжение
E	– модуль упругости при растяжении
G	– модуль упругости при сдвиге
σ_n	– нормальное напряжение
τ	– касательное напряжение
τ_s	– предельное касательное напряжение сдвига
p	– давление
λ	– коэффициент теплопроводности
c	– теплоемкость
ρ	– плотность
a	– температуропроводность
b	– коэффициент аккумуляции тепла
α	– коэффициент теплопередачи
q	– плотность теплового потока
$Q_{кр}$	– интегральная теплота кристаллизации
$r_{сн}$	– спектральная теплота кристаллизации
L	– удельная теплота кристаллизации
ξ	– толщина затвердевшей корки сплава
H	– функция Кирхгофа
U	– функция Гудмена
$R_{пр}$	– приведенная толщина стенки отливки
V_o	– объем отливки
S	– поверхность охлаждения отливки
$G_{ж}$ и $G_{тв}$	– энергия Гиббса металла в жидком и твердом состояниях
$S_{ж}$ и $S_{тв}$	– энтропия металла в жидком и твердом состояниях
ΔT	– переохлаждение
M	– молярная масса
D	– коэффициент диффузии

$\varepsilon_{Vж}$ – объемная усадка в жидком состоянии

$\varepsilon_{Vз}$ – объемная усадка при затвердевании

ε_m – линейная усадка в твердом состоянии

V – объем прибыли

K – коэффициент проницаемости при фильтрации

ψ – доля твердой фазы

ТЕОРИЯ ЛИТЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Компьютерная верстка Э.Б. Гофмана

Отпечатано в типографии Екатеринбургской епархии
(г. Екатеринбург, ул. Репина, 6. Тел. 269-75-40).